Компакты

Опр Метрическое пр-во - мн-во, на котором $\rho: M \times M \to \mathbb{R}$ задана метрика : $(x,y) \in M \times M \to \rho(x,y) > 0$, причем:

1. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$
2. $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$
3. $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

Опр Открытое подмн-во $E \subset A$ открытое, если

$$\forall x \in E \ \exists \delta > 0 \quad S(x, \delta) \in E$$

Опр Замкнутое мн-во - мн-во дополнение которого до A является открытым (содержит гранич точки)

Опр Открытое покрытие мн-ва E : пусть $U_\alpha : \alpha \in I$ (I - мн-во индексов) $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ - откр под-во E, если:

1. U_α открыто $\forall \alpha \in I$
2. $E \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$ $\quad \forall x \quad x \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha \leftrightarrow \exists \hat{\alpha} : x \subset U_{\hat{\alpha}}$

Опр $E \in M$ компактно в M, если

$$\left(\forall \{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \ E \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \to (\exists_{\alpha_1, \ldots \alpha_m} \ E \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_{\alpha_i}\right)$$

- существует конечное подпокрытие

Опр $P \subset M$ - несвязно, если $\exists U$ и W - открытое:

1. $U \cap W = \varnothing$
2. $P \cap U \neq \varnothing \quad P \cap W \neq \varnothing$
3. $P \subset U \cup W$

Опр Точки в метр пр-ве :

1. Внутренняя $x \in E \ \exists \delta > 0 \quad S(x, \delta) \in E$

2. Граничная $\forall \delta > 0 \quad S(x, \delta] \cap E \neq \emptyset$

$S(x, \delta] \cap A/E \neq \emptyset$

3. Предельная $\exists x \ \forall \delta > 0 \ \mathring{S}(x, \delta] \cap E \neq \emptyset$

4. Прикосновение $\exists x \quad \forall \delta > 0 \quad \mathring{S}(x, \delta) \cap E \neq \emptyset$

5. Изолированная $x \in E \quad \exists \delta > 0 \quad \mathring{S}(x, \delta] \cap E = \emptyset$

Теорема Всякое компактное мн-во ограничено и замкнуто $\forall r > 0 \ \exists x : E \subset S(x, r)$

~~попробуем сами~~

~~Пусть $K \subset M$ компактно, тогда M открыто~~

~~$K \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_\alpha$ m - конечно~~

~~U_α - открытые интервалы $\Rightarrow$ ограниченные~~

~~пересечение конечного их числа - ограничено~~

~~K полностью лежит в $\bigcup U_\alpha \Rightarrow$~~

~~граница тоже там лежит $\Rightarrow$ замкнуто~~

Теперь норм доказательство.

① Пусть $K \subset M$ компактно. Возьмём покрытие $K \subset \bigcup_{x \in K} S(x, r_x)$

$\exists x_1, \ldots, x_n : K \subset \bigcup_{i=1}^{n} S(x_i; r_{x_i})$ // по опр компакности

Возьмём $\forall z \in M$ и $r > \max\limits_{\forall i} \rho(z, x_i) + \max\limits_{\forall i} r_{x_i}$

$\forall y \in K \quad \exists S(x_i, r_{x_i}) : y \in S(x_i, r_{x_i})$

$$\rho(z, y) < \rho(z, x_i) + \rho(x_i, y) \leq \underbrace{\max_{\forall i} \rho(z, x_i) + \max_{\forall i} r_{x_i}}_{< r}$$

$\forall y \in K \to y \in S(z, r) \Rightarrow K \subset S(z, r)$ - K огр по определению

② Если $\bar{K} = M \setminus K$ открыто, то K - замкнуто

$(\forall z \in \hat{K} \quad \exists r > 0 \quad S(z, r) \subset E$ - внутр)

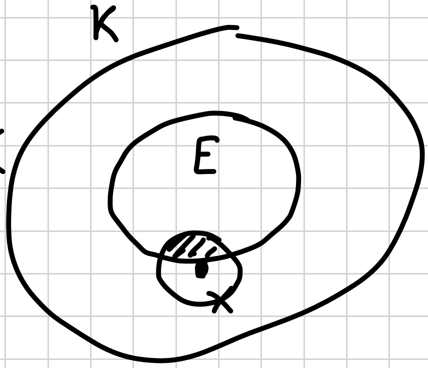
Пусть $z \notin K$ $\forall x \in K$ $\exists\ \rho(z,x)$, $S(x, \frac{\rho(z,x)}{3})$

$\underline{S(z, \frac{\rho(z,x)}{3})}$

дополнение открыто $\leftarrow$ можно покрыть открытыми

Теорема О существовании т. прикосновения

$\forall$ беск под-ва E компактного мн-ва K в K $\exists x$ т. прикосновения ($\forall r>0$ $\mathring{S}(x,r) \cap E \neq \varnothing$)



Пусть нет

$\exists r>0$ $\mathring{S}(x,r) \cap E = \varnothing$ $\forall x \in K$

$K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} S(x_i, r_{x_i})$

$\Rightarrow E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} S(x_i, r_{x_i})$

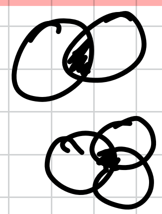
$E \cap \bigcup\limits_{i=1}^{n} S(x_i, r_{x_i}) = \varnothing$ $\rightarrow$ там ничего нет в E,

но E бесконечно $\Rightarrow$ противоречие

Теорема Наличие непустого пересечения центрированных (пересечение их не пусто) систем компакт под-в. Пусть K_α — компактно $\alpha \in A$ и для любого конечного под-ва $\forall I \subset A$

$\bigcap\limits_{\alpha \in I} K_\alpha \neq \varnothing \rightarrow \bigcap\limits_{\alpha \in A} K_\alpha \neq \varnothing$

для любого числа не пусто



$\square$ Пусть $\bigcap K_\alpha = \varnothing \Rightarrow \overline{\bigcap K_\alpha} = M$

$\overline{K_\alpha} = M \setminus K_\alpha$ — открыто

$\underbrace{\bigcup \overline{K_\alpha}}_{\text{открытое покрытие}} = M$ $\qquad$ $K_\alpha' \subset M \Rightarrow$

$\Rightarrow$ K'_α - (компакт) $\subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{K_\alpha}$ - сущ конечное подпокрытие

$$K'_\alpha \subset \bigcup_{\alpha\in I} \overline{K_\alpha} = M \setminus \bigcap_{\alpha\in I} K_\alpha$$

$$K'_\alpha \cap \left(\bigcap_{\alpha\in I} K_\alpha\right) = \varnothing$$

$$\bigcap_{\alpha\in I} K_\alpha = \varnothing$$ — противоречие по условию

Непрерывность

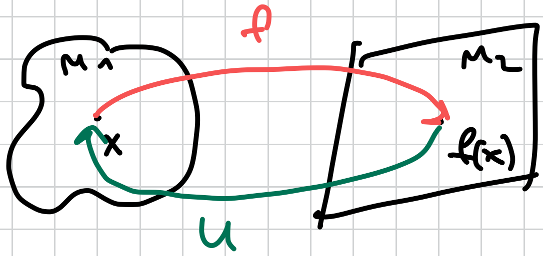
Опр $f: M_1 \to M_2$ непр в т. $x_0 \in M_1$, если $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x, x_0 \in M_1\ \rho_1(x,x_0)<\delta \Rightarrow \rho_2(f(x), f(x_0))<\varepsilon$

Опр Если $f: M_1 \to M_2$ непр и P - связно в M_1, то его образ $f(P)$ - связное под-во в M_2

Опр Непр обратное отображение:
Пусть $f: M_1 \to M_2$, $K \subset M_1$ - компакт, f - непр и $\forall x_1, x_2$ $x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$. Тогда на мн-ве $f(K)$ сущ (биекция) отображение $g: f(K) \to K$ обратное к f и непр на K

Теорема Отображение непрерывно $\Leftrightarrow$ прообраз открытого мн-ва открыт. $f: (M_1, \rho_1) \to (M_2, \rho_2)$ - непр $\forall x \in M_1$ $\Leftrightarrow$ $\forall W$ откр. в M_2 $U = f^{-1}(W) = \{x \in M_1 \mid f(x) \in W\}$ открыт в M_1

$\boxed{\Rightarrow}$ отображение непр и W - открыто $w \in W$
$f(x) = w$, пусть $U(W) = X$



– замкнуто пусть X' – граничная точка

$f(x') = w'$, вокруг w' существует значение

из открытости $|w' - w''| = \varepsilon \Rightarrow |x' - x''| < \delta$

$x'' \in X$

$\Rightarrow \exists\, S(x', \delta) \subset X$ – внутр точка – противореч

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть $\forall w \subset M_2$ $U = f^{-1}(w)$ – открыто

Возьмем $x \in M_1 \to \exists y = f(x) \in M_2$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, S(y, \varepsilon) \subset M_2$, $f^{-1}(S(y, \varepsilon))$ – открыт $\Rightarrow$

x – внутр точка $f^{-1}(S(y, \varepsilon)) \Rightarrow \exists \delta > 0$

$(S(x, \delta) \subset f^{-1}(S(y, \varepsilon)))$ $\boxed{\text{т.е } |x - \bar{x}| < \delta}$

Возьмем $\bar{x} \in S(x, \delta) \Rightarrow \bar{x} \in f^{-1}(S(y, \varepsilon)) \Rightarrow$

$f(\bar{x}) \in S(y, \varepsilon) = S(f(x), \varepsilon)$

$\Rightarrow \rho_2(f(\bar{x}), f(x)) < \varepsilon \Rightarrow f$ непр

Теорема Непрерывный образ компактного мн-ва компактен: Пусть $f(M_i, \rho_i) \to (M_2, \rho_2)$, причём f – непр на M_1, K – компакт в M_1.

Тогда $f(K)$ – компакт в M_2

$\square$ $K = \bigcup_{i=1}^{n} U_\alpha$ U_α – открытое $\Rightarrow$ переходит в открытое $f(U_\alpha)$ – открыто

$P = f(K) \subset f\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_\alpha\right)$ W_α – открыто в M_2 и обр откр покр P $P \in \bigcup_{\alpha \in A} W_\alpha$

$K \subset f^{-1}(P) \subset f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in A} W_\alpha\right)$

$\subset \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(W_\alpha) \Rightarrow K \subset \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(W_\alpha)$

$U_\alpha = f^{-1}(W_\alpha)$ – открыто

$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ (открытое покрытие)

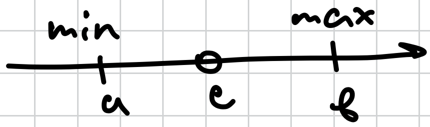
$P = f(K) = f\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}\right)$ (компакто) $\subset$

$\subset \bigcup_{i=1}^{n} f(U_{\alpha_i}) = \bigcup_{i=1}^{n} W_{\alpha_i}$ → конечное откр подпокрытие

⇒ P-компакт в M_2

Теорема. Непр. обр. связные. и компакты под-ва в M явл. отрезком, где $\rho: M \to \mathbb{R}$

Д. Пусть $\rho(K)$ – комп и связ мн-во, тогда ф-ция достигает на компакте своего минимума и максимума.



Пусть $\exists\, c \notin \rho(K)$. Из компакт

$\underbrace{\rho(K) \subset \{W_\alpha\}}$, т.е $\rho(K) \subset \underset{\text{отк}}{(-\infty; c)} \cup \underset{\text{отк}}{(c, +\infty)}$

из компактности замкнуто. – противор со связностью

Норма

Опр $\rho(x, 0) = \|x\| \geq 0$ $\forall x \in L$ – лин пр-во $\|x\|$-норма в L

св-ва нормы:

1° $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2° $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

3° $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Опр Пусть в L – КНЛП (конечно-мерное нормированное лин пр-во) $\|\ \|_1$ и $\|\ \|_2$ – эти нормы эквивалентны

$\exists\ 0 < d < D < \infty$, что $\forall x \in L$ $d\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq D\|x_1\|$

$\longleftrightarrow$ $\|x\|_1 \sim \|x_2\|$ на КНЛП $\exists!$ кл эквивалентности

1° Все нормы эквивалентны

2° Если E открыто в $\| \ \|_1$, то и в любом другом оно открыто

3° Если x_n фундаментальна в одной норме, то ф-на и в другой

4°. $\| \ \|_1$ - в L_1 (непрерывность)
$\| \ \|_2$ - в L_2

$f: L_1 \to L_2$ непр в точке

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in L_1 : \|x - a\|_1 < \delta \to \|f(x) - f(a)\|_2 < \varepsilon$$

Опр координатное представлен отображение.

$\dim L_1 = n \quad \dim L_2 = m$

$f: L_1 \to L_2$ - пр. отображение

$$\begin{tikzcd}
x \in L_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift right, "\hat{e}"'] & y \in L_2 \arrow[d, shift right, "\hat{g}"'] \\
\{x_1, \ldots, x_n\} \in \mathbb{R}^n \arrow[r, "f^*"] \arrow[u, shift right, "\hat{e}^{-1}"'] & \{y_1 \ldots, y_m\} \in \mathbb{R}^m \arrow[u, shift right, "\hat{g}^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

$\forall i \in \{1, \ldots m\} \ \exists f_i : (x_1 \ldots, x_n) \to y_i \in \mathbb{R}$

$$y_i = g_i^* \circ \hat{g} \circ f \circ e^{-1}\underbrace{(x_1 \ldots, x_n)}_{\text{числа в вектор } \bar{x}}$$

выбираем $y_i \to (y_1 \ldots y_n)$ в y

$$f^* \begin{cases} g_1 = f_1(x_1 \ldots x_n) \\ g_m = f_m(x_1 \ldots x_n) \end{cases}$$

Для всякого базиса $\{e_1, \ldots e_n\}$ существ двойств базис $\{e_1^*, \ldots, e_m^*\}$, что

$\langle e_i^*, e_i \rangle = \delta_{ij} \begin{pmatrix} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{pmatrix}$ т.е каждый ф-ал e_i „выбирает" i-ую координату вектора в базисе $\{e_j\}$

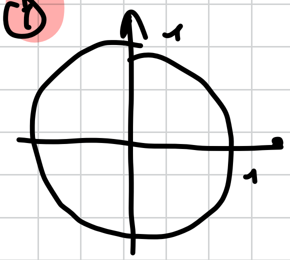
Опр Примеры норм:

L_2 1° евклидова $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$

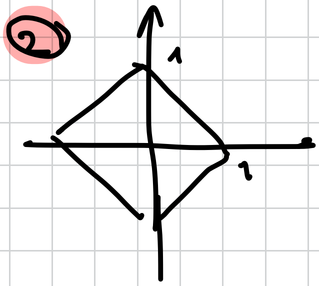
L_1 2° $\|x\|_1 = |x_1| + \dots |x_n|$

L_∞ 3° $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \dots |x_n|)$

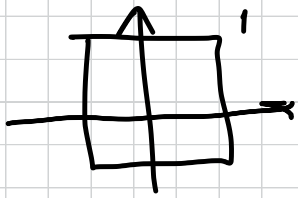
1



2



3



$L_2: \; p|x| + |y|^p \leq 1 \quad p = 2$

$L_1: \; p|x| + |y|^p \leq 1 \quad p = 1$

$L_\infty: \; p|x| + |y|^p \leq 1 \quad p = \infty$

Опр норма линейного отображения: $\|A\| = \sup \dfrac{\|Ax\|_{L_2}}{\|x\|_{L_1}}$

A - лин оператор (матрица)

(смотрим насколько сильно меняются вектора)

// наиб коэфф растяжения, который может выдать A

Теорема f - непр $\Longleftrightarrow \forall i \; f_i$ - непр

Опр $f: L_1 \to L_2$ непр в т. a $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall h \in L_1$

$\|h\|_{L_1} < \delta \to \|f(a+h) - f(a)\|_2 < \varepsilon$

$\alpha: L_1 \to L_2$ б.м $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall h \in L_1 \; \|h\|_{L_1} < \delta_1$

$\Rightarrow \|\alpha(h)\|_{L_2} < \varepsilon$

$\boxed{\Rightarrow}$ Пусть f не-но $\Rightarrow \exists \, \alpha(h) = f(a+h) - f(a)$

Выберем базисы в L_1 и L_2. Тогда

$\{e_i\}$ $\{g_i\}$

$\alpha(h) = f(a+h) - f(a)$

$\alpha_i(h) = f_i(a+h) - f_i(a)$

удобно взять тогда когда длина будет стремиться к 0.

Возьмём норму в L_2 $\|x\|_{L_2} = \sum_{j=1}^{m} |x^j|$,

тогда, если $\alpha(h)$ – б.м, то $\alpha_i(h)$ – б.м $\to$ f – мн-во

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть $\forall j$ f^j – непр $\Rightarrow$ $\forall j$ $\exists$ $\underset{\text{б.м}}{\alpha^j(h)} = \underset{\text{– б.м}}{f^j(a+h) - f^j(a)}$

Построим ф-цию $\alpha(h) = \sum \alpha^j(h) g_j$ – базис на коорд

$f^* = \sum f^j g_j \Rightarrow \alpha(h) = f^*(a+h) - f^*(a)$

$\Rightarrow$ f непр, но $f = \hat{g}^{-1} f^* \cdot \hat{e}(x)$ $\Rightarrow$ т.к композиции непр.

Теорема. Сущ нормы лин. оператора.

1) Пусть в L_1 есть $\|\cdot\|_{L_1}$ в L_2 $\|\cdot\|_{L_2}$ $e = \{e^i\}_{i=1}^{n}$ – базис L_1

$x \in L_1 \Rightarrow x = \sum x^i e_i$ $Ax = A(x^i e_i)$

$$\|Ax\|_{L_2} = \sum_{i=1}^{n} |x^i| \, \|A \cdot e_i\| \leq \max_{\forall i} \{|x^i|\} \left(\sum_{i=1}^{n} \|A \cdot e_i\|_{L_2}\right)$$

$\boxed{\max |x_i| = \|x\|_\infty}$

$$= \|x\|_\infty \cdot \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \|A \cdot e_i\|_{L_2}\right)}_{\text{это просто число}} \leq c\, \|x\|_{L_1} \sum_{i=1}^{n} \|A \cdot e_i\|_{L_2}$$

Тогда $$\frac{\|Ax\|_{L_2}}{\|x\|_{L_1}} \leq c \cdot \sum_{i=1}^{n} \|A \cdot e_i\|_{L_2}$$

Получено бесконечное огр. мн-во чисел $\Rightarrow$

$$\underbrace{\exists \sup \frac{\|Ax\|_{L_2}}{\|x\|_{L_1}}}_{} = \|A\|_{L_2} = c \cdot \sum_{i=1}^{n} \|A \cdot e_i\|_{L_2}$$

норма линейного отображения по опр

2) Примеры

1° $\|A\| = 0 \Rightarrow \sup \frac{\|Ax\|_{L_2}}{\|x\|_{L_1}} = 0 = c \cdot \sum_{i=1}^{n} \|A \cdot e_i\|_{L_2}$

$\Rightarrow \|A \cdot e^i\| = 0 \Rightarrow \underline{A = 0}$.

2° $\|\lambda \cdot A\| = \sup \frac{\|\lambda \cdot A \cdot x\|_{L_2}}{\|x\|_{L_1}} = \lambda \cdot \sup \frac{\|Ax\|_{L_2}}{\|x\|_{L_1}} = \lambda \cdot \|A\|$

3° $\|A+B\| = \sup \frac{\|(A+B)x\|_{L_2}}{\|x\|_{L_1}} = \sup \frac{\|Ax\|_{L_2}}{\|x\|_{L_1}} + \sup \frac{\|Bx\|_{L_2}}{\|x\|_{L_1}} = \|A\| + \|B\|$

Теорема f дифф-мо $\Leftrightarrow$ f_i дифф-мы

$\boxed{\Rightarrow}$ $f(a+h) - f(a) = Ah + o(\|h\|)$ $h \to 0$

$\exists$ линейный оператор $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Разложим по координатам:

$f_i(a+h) - f_i(a) = (Ah)_i + o_i(\|h\|)$

A - это матрица $(Ah)_i \to$ это скалярн произв i строки на h

$f = \{f_1 \dots f_n\}$

$(Ah)_i = L_i(h)$ - линейная форма

$\boxed{\Leftarrow}$ $f_i(a+h) - f_i(a) = L_i(h) + o_i(\|h\|)$ $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$Ah = (L_1(h), \dots, L_m(h))$ $i: \{1, \dots, m\}$

$\Rightarrow f(a+h) - f(a) = (f_1(a+h) - f_1(a), \dots\dots) = Ah + (o_1\|h\| \dots)$

Остат. член $o(\|h\|) = (o_1(\|h\|), \dots, o_m(\|h\|))$

$$\frac{\|o(\|h\|)\|}{\|h\|} = \frac{\sqrt{o_1^2 + \dots + o_m^2}}{\|h\|} \leq \frac{|o_1| + \dots |o_m|}{\|h\|} \to 0$$

б.м?

$\Rightarrow f$ - дифф-ма и $d f(a)(h) = Ah$

// Пример: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $f(x,y) = (x^2 + y, e^{xy})$

$f_1(x,y) = x^2 + y$ $f_2(x,y) = e^{xy}$

$df_1 = 2x \cdot dx + dy$ $df_2 = x e^{xy} \cdot dx + y e^{xy} \cdot dy$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ y\cdot e^{xy} & x\cdot e^{xy} \end{pmatrix}$$

$$df(2x\,dx + dy,\ ye^{xy}\,dx + x\cdot e^{xy}\cdot dy)$$

Теорема О диф-мости композиции отображений

Пусть $f: L_1 \to L_2$ диф-ма в т. $a \in L_1$ и $g: L_2 \to L_1$ т. $b = f(a)$. Тогда $F = g \circ f(x)$ – диф в т. $a \in L_1$

$$f(a+h) - f(a) = Ah + o(\|h\|_{L_1}) \qquad \alpha(h) \xrightarrow[h\to a]{} 0$$

$$g(b+\tau) - g(b) = B\tau + o(\|\tau\|_{L_2}) \qquad \beta(\gamma) \xrightarrow[t\to a]{} 0$$

$$o(\|h\|_{L_1}) = \|h\|_{L_1}\cdot\alpha(h)$$

$$o(\|\gamma\|_{L_2}) = \|\gamma\|_{L_2}\cdot\beta(\gamma)$$

Пусть $\tau = f(a+h) - f(a) = Ah + \|h\|_{L_1}\alpha(h)$

$$g(b+\tau) - g(b) = g(\cancel{b} + f(a+h) - \cancel{f(a)}) - g(b) =$$

$$= g(f(a+h)) - g(f(a)) = F(a+h) - F(a) =$$

$$B\tau + \|\gamma\|_{L_2}\cdot\beta(\gamma) = B(\underbrace{f(a+h) - f(a)}_{(Ah + \|h\|_{L_1}\cdot\alpha(h))}) + \|Ah + \|h\|_{L_1}\cdot\alpha(h)\| \cdot\beta(f(a+h) - f(a))$$

$$= B\cdot A\cdot h + \|h\|_{L_1}\left\{B\alpha(h) + \frac{\|Ah + \|h\|_{L_1}\alpha(h)\|}{\|h\|_{L_1}}\cdot\beta(f(a+h) - f(a))\right\}$$

$$F(a+h) - F(a) = B\cdot A\cdot h + \|h\|_{L_1}\cdot\underset{\text{б.м}}{\tilde{\gamma}}$$

Дифф-мость

Опр $f: L_1 \to L_2$ диф-ма в т. $a \in L_1$, если $\exists$ лин отобр. $A: L_1 \to L_2$ и $\alpha(h) \in \bar{o}(1)$

$$f(a+h) = f(a) + A\cdot h + \|h\|\cdot\alpha(h)$$

Всякое лин. отображение диф-мо в $\forall$ т.$a \in L_1$

Если f диф-мо в т.a, то такое отобр A – единственно.

Опр Частной произв наз коэф матриц линейного оператора $f'(a) \in \mathcal{L}(L_1, L_2)$

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) = g_j^* f'(a)\cdot e_i$$

$$\boxed{\lim_{t\to 0} \frac{f(a_1,\dots,a_i+t,\dots a_n) - f(\dots)}{t}}$$

и g_j^*

Опр $f(a+h) - f(a) = f'(a)\cdot h + \|h\|_{L_1}\cdot \alpha(h)$

// $df(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\,dx \to A$ полный диф отобр в т.a

Линейный оператор = полная произв

Опр f k-раз диф-емо, если все его част произв до $(k-1)$ порядка диф-емы в некоторой окр т.a.

$f''(a)$ – билинейный оператор

$$d^2 f = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h^i h^j$$

$f''(a)(h, h)$

Опр Полная производная k-го порядка

K-линейное отображение (k-линейный оператор?)

$d^k f(a)(\underbrace{h_1,\dots,h_k}_{k\text{ шт}})$, выражение через част произв:

$$d^k f(a)(h_1,\dots,h_k) = \sum_{i_1\dots i_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_k}}\cdot h_1^{i_1}\dots h_k^{i_k}$$

$$d^k f = \sum_{i_1\dots i_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_k}}\, dx_{i_1}\dots dx_{i_k}$$

св-ва: 1. d^k симметр отн. перестановки ф-ий

2° $d^k(\alpha f + \beta \cdot g) = \alpha d^k f + \beta \cdot d^k g$

3°. $d^k(fg) = \sum\limits_{m=0}^{k} \binom{k}{m} d^m f \cdot d^{k-m} g$

Теорема Непрерывности лин. отображений.

св-ва:

1° $\mathcal{L}(L_1, L_2)$ - линейное пр-во $(\dim \mathcal{L} = \dim L_1 \cdot \dim L_2)$

2° $A \in \mathcal{L}(L_1, L_2)$ $\exists \|\cdot\| : \mathcal{L}(L_1, L_2) \to \mathbb{R}$

// $\mathcal{L}(L_1, L_2)$ – мн-во всех возможных линейн операторов A (их бесч-много) $A: L_1 \to L_2$

3° $\forall A \in \mathcal{L}(L_1, L_2)$ $\lim\limits_{h \to 0} A \cdot h = \bar{0}$

4° Все линейн. отобр равномерно непр на всём L_1.

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta$ $\delta = \frac{\varepsilon}{\|A\|}$ $\forall x_1, x_2$ $\|x_1 - x_2\| < \delta \to \|A(x_1 - x_2)\| < \varepsilon$

Д-во:

1°. $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ из L_1 $\quad A = \begin{array}{c} n \\ \begin{pmatrix} & & \end{pmatrix} \end{array} m$

2°. т.е мы берем лин оператор из $\mathcal{L}(L_1, L_2)$ A, берем норму $\|\cdot\|$, и так поочередно по двум пр-вам или обоим

$\|A\| = \sup \frac{\|A \cdot x\|_{L_2}}{\|x\|_{L_1}}$ и тогда, если это $\mathbb{R}$, то

$\|A\| = 1$ - ? $\qquad \|x\|_{L_1} = \|Ax\|_{L_2}$

A – единичная матрица?

3°. $\lim\limits_{h \to 0} A \cdot h = \bar{0}$ $\qquad m \begin{pmatrix} & n & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$

$h \to 0 \Rightarrow h_1, \dots, h_n \to 0 \Rightarrow$

$y_1 \to 0, \dots, y_m \to 0 \Rightarrow \bar{y} \to \bar{0}$

Ну или они сказали, что все стремится в 0,

$\|A \cdot h\| \leq \|A\| \cdot \|h\|_{L_1}$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \quad \delta = \frac{\varepsilon}{\|A\|} \qquad \|A \cdot h\| \leq \varepsilon$

$\|h\|_{L_1} < \delta$

4° возьмем $\delta = \frac{\varepsilon}{\|A\|}$ и $\|A(x_1 - x_2)\| = \|A\| \cdot \|(x_1 - x_2)\|_{L_1}$

$\|x_1 - x_2\|_{L_1} < \delta$

Теорема Непрерывность композиции

$g: L_2 \to L_3$ - непр в т. $b = f(a)$

$f: L_1 \to L_2$ - непр в т. a

$F = g \circ f : L_1 \to L_3$ - непр в т. a?

$f: \forall \varepsilon_1 > 0 \; \exists \delta_1 > 0 \quad |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon_1$

$g: \forall \varepsilon_2 > 0 \; \exists \delta_2 > 0 \quad |y - b| < \delta_2 \Rightarrow |g(y) - g(b)| < \varepsilon_2$

Нужно доказать:

$\forall \varepsilon_3 > 0 \; \exists \delta_3 > 0 \quad |x - a| < \delta_3 \Rightarrow |F(x) - F(a)| < \varepsilon_3$

$\Downarrow \qquad \varepsilon_1 \leq \delta_2$

$|f(x) - f(a)| < \varepsilon_1$

$|y' - b| < \varepsilon_1 \Rightarrow |g(y') - g(b)| < \varepsilon$

$= |g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$

$|F(x) - F(a)| < \varepsilon$

Теорема об обратном отображении

Пусть f — непр. диф-емое отображение открытого мн-ва $E \subset \mathbb{R}^n$ в пр-во L.
Пусть $f'(x)$ в т. $a \in E$ обратимо, т.е $\det f'(a) \neq 0$. Причем $b = f(a)$. Тогда:

1° $\exists$ открытые мн-ва U_a и W_b такие, что (биекция)
$\forall x_1, x_2 \in U_a : x_1 \neq x_2 \leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, $f(U_a) = W_b$,
т.е на W_b $\exists g : W_b \to U_a$ $\qquad g: y \to x$

2° $g : W_b \to U_a : \forall y = f(x) \quad g(f(x)) = x$ $\qquad g: z \to h$

Причем $g(y) = x$ - непр диф $\forall x \in W_b$,
причём $g'(y) = f'(g'(y))$ $\forall y \in W_b$

Док-во

У нас есть множество целых $f(x) = y$. Нам нужно выразить из него x, т.е найти $x = g(y)$
Приближаем кривую ф-цию $f(x)$ вблизи точки a её плоской касательной (дифф-лом):

$$f(x) \approx f(a) + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{приближение}}}{f'(a) \cdot (x-a)}$$

$$f(x) = y$$

$$f(a) + f'(a)(x-a) \approx y$$

$$\underbrace{f'(a)}_{\text{матрица якоби}} \cdot (x-a) \approx y - f(a)$$

$A \cdot (x-a) = y$ должно иметь 1 решение (для обр)

$\Rightarrow \det A \neq 0$ — обратима (из линейной алгебры)

2° $g'(y)$ – ?

$f: X \to Y \qquad g: Y \to X$

$$g(y) = g(f(x)) = x$$

$$(g(f(x)))' = g'(y) \cdot f'(x) \cdot x' = x'$$

$$g'(y) \cdot f'(x) = E$$

$$g'(y) \cdot f'(x) \cdot f'(x)^{-1} = f'(x)^{-1}$$

$$g'(y) \cdot E = f'^{-1}(x) = f'(g(y))^{-1}$$

Опр Пусть A и B – мн-ва $\rho \subset A \times B$ – функ-но

$(a, b) \in \rho$ и $(a, b_1) \in \rho \Rightarrow b_1 = b$

$\forall a \ (a, b) \in \rho \quad \exists! \ b = \rho(a)$ – явная ф-я (если есть ф-я)

$(a, b) \in \rho$ – ф-но – неявное

Теорема о неявном отображении

Пусть $f: L \to M \quad \dim L = n \quad \dim M = m \quad n = m + k$

1° $\exists a \in L$ и $b \in M$ т.ч. $f(a) = b$

2° $f: L \to M$ непр. д-мое отоб $L = H \oplus W$

3° $\begin{cases} z_1 = f_1(h, w) \\ \vdots \\ z_m = f_m(h, w) \end{cases} \qquad f' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial h_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial h_m} & \frac{\partial f_1}{\partial w_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial w_k} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial h_1} & & & & & \frac{\partial f_m}{\partial w_k} \end{pmatrix}$

m уравнений которые между собой не линейно зависим, поэтому

$$\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial h_j}\right)\Big|_a \neq 0$$

$i, j = \{1 \dots m\}$

По теореме об обратной ф-ции.

Тогда $\exists$ в области $E \subset M$ непр. диф-ое отображение $g: E \to M$, что

$$\begin{cases} f_1(g_1(\omega) \dots g_m(\omega), \omega) = b_1 \\ f_m(g_1(\omega), \dots, g_m(\omega), \omega) = b_m \end{cases} \quad h = g(\omega)$$

Теорема. **Следствие обратного отображения.**

1. $\forall B \in \beta(L)$ – семейство открытых в L
$A: \exists A^{-1} \quad \|A - B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|} \Rightarrow \exists B^{-1}$

$\|a+h-a\|$

Д-во:

1° f' непр-на в т. a $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall h \ \|h\| < \delta$
$\|f'(a+h) - f'(h)\| < \varepsilon$ – непрерывность производной

$f'(a) = A$ – линейный оператор

$\|f'(a+h) - A\| < \varepsilon$

2° Пусть $\lambda = \frac{1}{4\|A^{-1}\|}$ и $\varepsilon = 2\lambda$

Тогда $\forall x \quad \exists \delta_x > 0 \ \|x - a\| < \delta_x \to |f'(x) - A| < \varepsilon$

$$|f'(x) - A| < \frac{1}{2\|A^{-1}\|} < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

Тогда по всей) логике $f'(x)$ – обратим
(надо это доказать) $\forall x \in S(a, \delta_\varepsilon) = U_2 \ \exists (f(x))^{-1}$

$x \in U_a \qquad h \in L \qquad x + h \in U_a$

f-дифф-ема: $f(x+h) - f(x) = f'(x) \cdot h + \|h\| \cdot \alpha(h)$

Пусть $\tau \in \mathbb{R}$. Зададим $\varphi: \tau \to L$

$\varphi(\tau) = f(x + \tau h) - \tau A h$ – просто так зададим

$\varphi(1) - \varphi(0) = f(x+h) - Ah - f(x) = \varphi'(\tilde{\tau})$

По т. о диф-сти композиции и диф лин отобр

$\varphi'(\tilde{\tau}) = (f(x + \tilde{\tau} h))h - Ah$

Теорема (все частные произв $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ непр в т. a) $\to$ (f дифф-ма в т. a)

$f(x_1, \dots, x_n)$ и т. a $(a_1, \dots, a_n)$

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} f(a_1, \dots, a_i + h_i, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)$$

по каждой аргументу

Применим ф-лу Лагранжа по каждой

$$f(a+h) - f(a) = f'(\xi) \cdot h$$

f' – матрица частных $\qquad \xi = a + \theta \cdot h \qquad \theta \in [0,1]$

$a \qquad a+h$

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + \theta h) \cdot h$$

Рассмотрим ф-цию одной переменной

$$\varphi_i(t) = (a_1, a_2, a_3 \dots, a_i + t h_i, \dots a_n)$$

тогда $f(a_1, \dots, a_i + h_i, \dots a_n) - f(a_1, \dots, a_n) = \varphi_i(1) - \varphi_i(0)$

Лагранж: $\varphi_i(1) - \varphi_i(0) = \varphi_i'(\theta_i) =$

$= \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_i + \theta_i h_i, a_n) \cdot h_i$

$$f(a+h) - f(a) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + \theta h) \cdot h - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i}_{\text{остаток}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i}_{f'(a) \cdot h}$$

$$\underbrace{f'(a)}_{A} \cdot h$$

↑ дифференциал

Оценим остаток, для этого нам и нужна была непр. часть. произв.!

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+\Theta h) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right| < \frac{\varepsilon}{n} \quad \text{при } |\Theta h| < \delta$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a+\Theta h) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right| < \frac{\varepsilon}{n} \cdot n \leq \varepsilon$$

Теорема Дифф-емость лин отображений

$L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ диф. $\forall a \in \mathbb{R}^n$, причем $dL(a) = L$

1) L диф-емо, если $\exists$ лин. отобр $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

2) $\dfrac{\| o(\|h\|) \|}{\|h\|} \to 0$ при $h \to 0$

$\underline{\mathcal{D}}$ $L(a+h) - L(a) = Ah + \|h\| \cdot \alpha(a) = Ah + o(\|h\|)$

$\forall a$ $L(a+h) - L(a) = L(a) + L(h) - L(a) = L(h) = Ah + o(\|h\|)$

$$\Rightarrow L \approx A$$

Надо рассмотреть вопрос единств A

Пусть это не так $A, B \in \mathcal{L}(L_1, L_2)$

$f(a+h) = f(a) + Ah + \|h\| \alpha(h)$

$f(a+h) = f(a) + Bh + \|h\| \hat{\alpha}(h)$

$$Ah - Bh = \|h\| (\hat{\alpha}(h) - \alpha(h))$$

$$A - B = \underbrace{\frac{\|h\|}{h}}_{\text{огр}} (\hat{\alpha}(h) - \alpha(h)) = \text{б.м}$$

б.м

$$\Rightarrow A \approx B$$

Теорема Непр. диф-мость обр. отображения.

1) Непрерывность: если $f: U_a \to W_b$ непр и биективно, то $f^{-1}: W_b \to U_a$ непр. В L-кипп, все огр. и

замкн. подм-ва компакт, U_a по условию замкнуто и огр $\Rightarrow$ компакт, тогда $f(U_a) = W_b$ - компакт т.к f-непр (по теор. образа комп подм-ва), т.к W_b и U_a компакт, то $g(W_b) = U_a$ - непр. W_b - связно по теор непр образа, т.к U_a связно.

2) Диф-сть: $\overset{\text{дано}}{\downarrow}$ $f(x+h) - f(x) = Ah + \|h\| \cdot \alpha(h)$

1° Рассм т. $y \in W_y$ $g(y) = x$

$y + \tau \in W_b$ $g(y+\tau) = x_1$ и $x_1 \neq x$ т.к $\overset{\text{обр}}{\exists g}$

Тогда $\exists h \in L$ $x - x_1 = h \Rightarrow x_1 = x + h \Rightarrow g(y+\tau) = x+h$

2° $g(y+\tau) - g(y) = x + h - x = h$ типо пусть это так?

$= B\tau + \|\tau\| \cdot \beta(\tau) \ominus$, $\tau = f(x+h) - f(x)$

$\ominus$ $B(\underset{f'(x) \cdot h + \|h\| \cdot \alpha(h)}{\underbrace{f(x+h) - f(x)}}) + \|\tau\| \cdot \beta(\tau)$

3° Пусть $B = (f'(x))^{-1}$

$\cancel{h} = \cancel{h} + (f'(x))^{-1} \cdot \|h\| \cdot \alpha(h) + \|\tau\| \cdot \beta(\tau)$

$$\frac{-(f'(x))^{-1} \cdot \|h\| \cdot \alpha(h)}{\|\tau\|} = \beta(\tau)$$

огр т.к линейный оператор - т.е просто матрица

б.м

нужно это оценить

Возьмём $\lambda = \frac{1}{4\|A^{-1}\|}$ и $\varepsilon = 2\lambda$

т.к f непр: $\exists \delta \; \forall x \; \forall \varepsilon \; \|x - a\| < \delta \to \|f'(x) - A\| < \varepsilon <$

$< \frac{1}{2\|A^{-1}\|}$

вводим ф-цию одной перемен

Пусть $\varphi(\tau) = f(x+\tau h) - \tau A h$

$$\varphi'(\tau) = (f(x+\tau h))' \cdot h - Ah = \left((f(x+\tau h))' - A\right)h$$

$$\varphi(1) - \varphi(0) = f(x+h) - f(x) - Ah$$

$\varphi^*(\tau)$ – sup

$$\|\varphi'(\tau)\| \leq \underbrace{\|(f(x+\tau h))' - A\|}_{< \frac{1}{2\|A^{-1}\|}} \cdot \|h\| < \frac{\|h\|}{\|A^{-1}\|}$$

Обобщ. т. Лагранжа.

$$\|\varphi(1) - \varphi(0)\| \leq \varphi'(\tau^*) \leq \frac{\|h\|}{2\|A^{-1}\|}$$

sup

$$\|\underbrace{f(x+h)}_{y+r} - \underbrace{f(x)}_{y} - Ah\| \leq \frac{\|h\|}{2\|A^{-1}\|}$$

$$\|r - Ah\| \leq \frac{\|h\|}{2\|A^{-1}\|}$$

$$\|A^{-1}r - h\| \leq \frac{1}{2}\|h\|$$

$$\|h\| - \|A^{-1}r\| \leq \|h - A^{-1}r\| \leq \frac{1}{2}\|h\|$$

$$\frac{1}{2}\|h\| \leq \|A^{-1}\| \|r\|$$

$$0 \leq \frac{\|h\|}{\|r\|} \leq 2\|A^{-1}\|$$

огр

$\Rightarrow \beta(r)$ – б.м т.к огр. огр. б.м.

Лемма 1

$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

$$\boxed{\|A\| = \sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}$$

т.к. тут супремум

$\Rightarrow \|A\| \cdot \|x\| \geq \|Ax\|$

$$\|A\underbrace{Bx}_{y}\| \leq \|A\| \cdot \|y\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|x\|$$

$y = Bx$

$$\underbrace{\frac{\|(AB)x\|}{\|x\|}}_{\text{макс это } \|AB\|} \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

Лемма 2

Пусть $C \in \mathcal{L}(L_1, L_2)$ – мн-во лин операторов. $\|C\| < 1$, тогда оператор $(E - C)$ – обратим

$\square$: Рассмотрим посл-ть $D_n = E + C + C^2 + \ldots + C^n$

1°. D_n – сходится т.к. рассмотрим $N > K$, такой, что $\underbrace{C^k}_{\text{т.к. } C<1} < \delta$: $D_m - D_n = C^{m+1} + \ldots + C^n$

δ – достижимо

$\leq (n-m) \cdot C^{m+1} <$

$(n-m) \cdot \delta < \varepsilon$

$\delta < \frac{\varepsilon}{n-m}$

фунд.

2°. фунд $\Rightarrow$ сущ предел

пусть $\lim\limits_{n\to\infty} D_n \to D$

Надо доказать, что $D(E-C) = E$

$$(D - D_n)(E-C) + D_n(E-C) = (D-D_n)(E-C)$$
$$+ E + \cancel{C} + \cancel{C^2} + \ldots + C^n - \cancel{C} - \cancel{C^2} - C^3 - \ldots - C^{n+1} =$$
$$= (D-D_n)(E-C) + E - C^{n+1}$$

$$\|D(E-C) - E\| = \|(D-D_n)(E-C) - C^{n+1}\|$$
$$\leq \|D - D_n\| \|E - C\| + \|C^{n+1}\|$$

$\underbrace{\quad}_{\text{б.м}}$ $\underbrace{\quad}_{\text{огр}}$ $\downarrow$ из фунд

при $n\to\infty$

$C^{n+1}\to 0$

$$\exists n\ \forall\varepsilon\quad \|D(E-C)-E\|<\varepsilon \Rightarrow$$

$$D(E-C)=E$$

$\uparrow$ обратная к $E-C$

Теорема Пусть $\beta(L)=\{A\in\mathcal{L}(L_1,L_2)\}$, причём β не коммутативное кольцо (абелева по сложению и полугруппа по умн) по умножению (не полугруппа, только замкнут?)

замкн + ассоциативно

$G(L)$ - группа операторов из $\beta(L)$. Тогда $G(L)$ - открытое под-ство в $\beta(L)$ как нормированном пр-ве.

$G(L)$ - открыто $\Rightarrow$ любая его точка внутренняя

$\forall A\in G(L)\quad \exists r>0:\ S(A,r)\in G(L)$

$\forall B\in G(L)\quad \exists r'>0:\ S(B,r')\in G(L)$

или $\forall A\in G(L)\quad \exists r>0: \forall B,\ B\in S(A,r)\Rightarrow B\in G(L)$

(т.е точке $'$, в не уйдет)

$\Downarrow$

$\|A-B\|<r$ - надо доказать

$$B=A+B-A=A(E+A^{-1}(B-A))$$

$$\|A^{-1}(B-A)\|\leq\|A^{-1}\|\|B-A\|$$

По лемме 2, если

$$C=(E-\underbrace{A^{-1}(A-B)})\rightarrow \text{ если это } <1,$$

Из пусть: $\|A^{-1}\|\|A-B\|<1$

Возьмем такое V

$\Rightarrow \|A-B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$

то C обратим,

тогда там фунд сходится

$B = A \cdot C$ $\begin{cases} G - \text{группа} \\ C \in G \\ A \in G \end{cases} \Rightarrow B \in G$

Тейлор + Лагранж

Опр Ф-ла Тейлора функции многих переменных: $f(x+h) = f(x) + df + \frac{d^2 f}{2!} + \dots + \frac{d^k f}{k!} + \|h\|^k \alpha(k)$

Пусть $f: S(a,x) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — ф-ция, опр. в окр. x т. $a \in \mathbb{R}^n$ и f имеет непр частные произв до $m+1$ порядка включительно.

Тогда $\forall x \in S(a,x)\ \exists\ \xi \in [a,x]$ т.ч.

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} \underbrace{\sum_{i_1=1}^{n} \dots \sum_{i_k=1}^{n}}_{\text{это просто сумма всевозможных}} \underbrace{\frac{\partial^k f(a)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}}_{k \text{ переменных}} (x_{i_1} - a_{i_1}) \cdot \ldots \cdot (x_{i_k} - a_{i_k}) + R_m(x)$$

$R_m(x)$ - ост член в ф-ме Лагранжа

$$R_m(x) = \frac{1}{(m+1)!} \left(\sum_{i_1=1}^{n} \dots \sum_{i_{m+1}}^{n} \frac{\partial^{m+1} f(\xi)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{m+1}}} (\ \ )(x_{i_{m+1}} - a_{i_{m+1}}) \right)$$

Опр. Гладкая k-мерная пов-ть.

Пусть $1 \le k \le n$. Мн-во $M \subset \mathbb{R}^n$ назовем гладкой k-мерной пов-стью, если $\forall x_0 \in M$

$\exists\ S(x_0, r)$ $\exists\ \Omega$ - открытое в $\mathbb{R}^n$ $\exists\ \varphi: \Omega \to \mathbb{R}^n$

Причем:

1. φ – гладкое (беск дифф) есть непр производ.
2. $\varphi : \Omega \to M \cap S(x_0, r)$ – гомеоморфизм (биекция f и f^{-1} – непрерыв)
3. $\operatorname{rank} d\varphi = k \quad \forall x \in \Omega$ (линейная независимость кас-ных векторов) якобиан имеет макс ранг, чтобы не схлопнуться

// φ – параметризация M в окр-ти x_0

Способы задания пов-сти:

1°. явное $\quad y = x^2, \quad z = x^2 + y^2$

2°. неявное $\quad$ зададим k непр диф-мых ф-ций $\varphi_1(x_1, \dots x_n)$
$\vdots$
$\varphi_k(x_1, \dots, x_n)$

$\varphi_i = 0$ – условие связности

Если $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ – независимы, то по т. о неявной ф-ции $\exists\, g_1, \dots, g_k(x_{k+1} \dots x_n)$, т.ч. $\forall j \quad \varphi_j(g_1(x_{k+1} \dots x_n), \dots, g_k(x_{k+1}, \dots x_n), x_{k+1} \dots x_n) = 0$

всегда можем выразить часть переменных через оставшиеся неявное $\to$ явное.

Опр. $x_0 \in \gamma$ т. локал экстремума $f(x) : L \to \mathbb{R}$ на γ, если $\exists\, S(x_0, \delta) \ \forall x \in (\gamma \cap S(x_0, \delta))$

$f(x) \geq f(x_0)$ – минимум $\qquad$ x_0 искомая точка!

$f(x) \leq f(x_0)$ – максимум

Опр $L(x, \lambda) = f + \lambda_1 \cdot \varphi_1 + \dots + \lambda_k \varphi_k$ – ф-ция Лагранжа, φ_i – ф-ции неявно заданной пов-сти

Опр. $\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \\ \varphi_i = 0 \end{cases}$ — $\nabla f \perp T_{x_0}\gamma$

решение этой сист — крит. точки ф-ции Лагранжа.

Опр. $d^2 L$ знакоопр, то $x_0 \in \gamma$ т. локал экстремума

Теорема. О достаточном условие экстремума. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Если $M = \{ g(\alpha), \alpha \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \}$ $x_0 \in M$, причем $\Phi(\alpha) = f(g_1(\alpha), \dots, g_n(\alpha))$

1° $d\Phi = 0$ 2°. $d^2\Phi$ - знакоопр.

Док. 1) Пусть $M: x = g(\alpha)$. Построим $\Phi(\alpha) = f(g(\alpha))$

$x_0 + h = g(\alpha_0 + d\alpha) \in M$ — (возьми некоторую точку на M)

По ф-ле Тейлора для ф-ции вект. аргумента

$$f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)\cdot h + \frac{1}{2}\left((f''(x_0)h, h) + \|h\|^2 \gamma(h) \right)$$

$$(dx, dy)\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

$$\Phi(\alpha_0 + d\alpha) - \Phi(\alpha_0) = \Phi'(\alpha_0)\cdot d\alpha + \frac{1}{2} \|\Phi''(\alpha_0) d\alpha, d\alpha) + \|d\alpha\|^2 \delta(d\alpha)$$

$$= \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i} d\alpha_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} + \|d\alpha\|^2 \delta(d\alpha)$$

2) $x_0 = g(\alpha_0) \Rightarrow h = g(\alpha_0 + d\alpha) - g(\alpha_0) =$

$= g'(\alpha_0) d\alpha + \frac{1}{2}(g''(\alpha_0) d\alpha, d\alpha) + \|d\alpha\|^2 \cdot \Theta(d\alpha)$

Тогда $f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(g'(\alpha_0)) d\alpha +$

$+ \frac{1}{2}(g''(\alpha_0)\,d\alpha, d\alpha) + \frac{1}{2}(f'(x_0)(g'(\alpha_0)\,d\alpha + o(\|d\alpha\|^2))$

$\ominus\ f'(x_0)\, g(\alpha_0)\, d\alpha + \frac{1}{2} f'(x_0)(g''(\alpha_0)\,d\alpha, d\alpha) +$

$\frac{1}{2}(f''(x_0)\,g'(\alpha_0)\,d\alpha, g'(\alpha_0)\,d\alpha) + o\,\|d\alpha\|$

Т.к x_0 - точка условного экстремума $\Rightarrow$ выпол. необх условие

$f'(x_0) \perp T_{x_0}M \Rightarrow d\Phi = 0 \Rightarrow f'(x_0)g'(\alpha_0)d\alpha = 0$

Т.е. $f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{1}{2}(\Phi''(\alpha_0)\,d\alpha, d\alpha) + o(\|d\alpha\|^2)$

по теор о равенстве смеш произв матрица $\Phi''(\alpha_0)$ - симметрична $\Rightarrow$ по теор. о приведении квадр форм к каном виду

$\exists$ канонический вид. Пусть e_j - базис из собств. векторов.

$(\Phi''(\alpha_0)\,d\alpha, d\alpha) = \|d\alpha\| \cdot (\Phi''(\alpha)\,\xi, \xi)\quad \|\xi\| = 1$

Тогда $(\Phi''(\alpha_0)\,\xi, \xi) = \lambda^j \xi^{j\,2} \Rightarrow S \quad \xi = \sum \xi^i e_i$

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{1}{2}\|d\alpha\|^2 \underbrace{(\lambda_1 \xi_1^2 + \dots \lambda_k \xi_k^2)}_{S} + o\,\|d\alpha\|^2$$

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \|d\alpha\|^2 \left(\frac{1}{2}S + \delta(d\alpha)\right) = \|d\alpha\|^2 \cdot S\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{S}\delta(d\alpha)\right)$$

$\mathcal{D}$ по $\frac{S}{2}$ $\exists\ \varkappa > 0$ $\|d\alpha\| < \varkappa \to \left|\frac{1}{S}\delta(d\alpha)\right| < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{S}\delta(d\alpha) > 0$

$\Rightarrow$ Если $S > 0$ т.е $d^2\Phi$ - полож опр - мин

Если $S < 0$ т.е d^2L - отриц опр - макс.

Теорема Если на M задана система ф-но независимых неявных ф-ций $\varphi_1, \dots, \varphi_k$. То если x_0 — т. условного экстремума, то:

1) $dL = 0$ 2) $d^2L \big|_{T_{x_0}M} = \delta$ — знакоопр

// Ф-ции $\varphi_1(x) \dots, \varphi_k(x)$ — ф-но завис, если $\exists$ гладкая ф-ция $\Phi(\dots) \neq 0$, что $\forall x$

$\Phi(\varphi_1(x) \dots \varphi_k(x)) = 0$

$\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)$ — функцион независ $\Leftrightarrow rang\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right) = k$

// Если $F(x,y) = 0$ задаёт неявн зависимость $y = f(x)$, то при некотором условии эту зависимость можно выразить явно

// $(\nabla f, x_i(\alpha_0)) = 0$, т.е $\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g_i}{\partial \alpha_j} = 0$

$\nabla f = 0$ и частн. произв найдена авиа 0

Д-во

1) $M = \begin{cases} \varphi_1(x_1 \dots x_n) = 0 \\ \varphi_k(x_1 \dots x_n) = 0 \end{cases}$ ф-но незав система

$\Rightarrow$ из необх и дост условия $rang\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right) = k$

Построим кас пл-сть в т. x_0

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} dx_n = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} dx_1 \dots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} dx_n = 0 \end{cases}$$

По т. о неявной ф-ции: $\exists \hat{g}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ и $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, где $x_{k+i} = \alpha_i$

Построим ф-цию Лагранжа: $L(x, \lambda) =$

$= f(x) + \lambda_1 \cdot \varphi_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \varphi_k$ Т.к x_0 - усл экстремум, то из необх усл. $dL = 0$.

2) Заметим, что $L(x, \lambda) = f(x)$ $\forall x \in M$, поэтому если x_0 - экстремум $L|_M$, то для $f(x)|_M$ - это экстремум

Возьмем т. $x \in M$: $x \neq x_0$ $x - x_0 = h$. Из построения ф-ции Лагранжа $f(x) = L(x)$, тогда по теор о ф-ле Тейлора ф-ции векторного аргумента:

$$(*)\quad L(x_0+h) - L(x_0) = \overset{\nabla L}{L'(x_0) \cdot h} + \frac{1}{2}\left(\overset{d^2L}{L''(x_0)}h, h\right) + \|h\| \cdot \alpha(h)$$

$$= dL + \frac{d^2L}{2} + \bar{o}(\|h\|^2)),$$ т.к $dL = 0$,

то $f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{1}{2}(d^2L\, h, h) + o(\|h^2\|)$

// h - определется системой $\{\varphi_i(a+h) = 0\}$

$\Rightarrow \{\varphi_i(a) + \nabla\varphi_i h + o(\|h\|^2) = 0\}$

(убирая $\bar{o}$, проектируем вектор / имеем $dx, dy \ldots$)

h- решение системы подставлеем в d^2L. Получим сист одн. ур-ий, опр h^*, как вектор из кас плоскости $h(\Delta x, \Delta y)$ $h^*(dx, dy)$

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_k(x) = 0 \end{cases}$$ возьмём т. $a+h$ на γ, тогда $$\begin{cases} \varphi_1(a+h) = 0 = \cancel{\varphi_1(a)} + \nabla\varphi_1 h + o(\|h\|^2) \\ \vdots \\ \varphi_k(a+h) = 0 = \cancel{\varphi_k(a)} + \nabla\varphi_k h + o(\|h\|^2) \end{cases}$$ т. а на пов-сти

$$\begin{cases} \nabla\varphi_1 h + o(\|h\|^2) = 0 \\ \vdots \\ \nabla\varphi_k h + o(\|h\|^2) = 0 \end{cases}$$ $h^* = h + \bar{o}(\|h\|^2)$ - реш этой системы экв h

Подставим $h = h^* - \bar{o}(\|h\|^2)$ (перпендикулярна к каждому $\boxed{\nabla\varphi^T \cdot h^* = \nabla\varphi\, h^*}$)

$$\begin{cases} \nabla e_1 (h^* - \bar{o}(\|h\|^2)) + \bar{o}(\|h\|^2) = 0 \\ \nabla e_k (h^* - \bar{o}(\|h\|^2)) + \bar{o}(\|h\|^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla e_1 h^* = 0 \\ \vdots \\ \nabla e_k h^* = 0 \end{cases}$$

$\boxed{d^2L(h,h) = h^T \cdot M \cdot h}$

$\boxed{dL = \nabla L \cdot h}$

$\boxed{M \text{ - матрица Гесса}}$ $\nabla^2 L$ $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}\right)$

/ h^* – решение этой системы

Подставим это решение в (*) во второй дифф-ал $f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}(h^* + \bar{o}(\|h\|^2))^T \cdot$
$\cdot \nabla^2 L (h^* + \bar{o}\|h\|^2) = \frac{1}{2} h^T \cdot \nabla^2 L \cdot h = \frac{1}{2} h^{*T} \nabla^2 L h^* + \bar{o}(\|h\|^2)$

$\Rightarrow$ знак разности (*) говорит, что если

$\nabla^2 L$ - положит определена то $f(a+h) - f(a) > 0$

$\Rightarrow$ все больше $f(a)$, a - минимум,

и аналогично с отриц опред.

Числовые ряды

I Суммирование числовых посл-й.

Ω - счётное мн-во $\forall \omega \in \Omega \to a(\omega)$ - числ посл-ть

Опр $\beta_0(\Omega)$ – все конечные подмн-ва Ω

$\forall E \subset \beta_0(\Omega)$ $\forall a : \Omega \to \mathbb{R}$ $\exists \mu(a, E) = \sum\limits_{\forall \omega \in E} a(\omega)$

– конечно аддитивная мера на алгебр конечных подмн-в счетн мн.

сумма знач всех точек

св-ва $\mu(a, E)$:

1° $\mu(a, \{\omega\}) = a(\omega)$

2° $\mu(a, E_1 \cup E_2) = \mu(a, E_1) + \mu(a, E_2)$

аддитивно по E $\quad E_1 \cap E_2 = \varnothing$

3° $\mu(a, E) = \mu(a, E \cup \varnothing) = \mu(a, E) + \mu(a, \varnothing) \Rightarrow \mu(a, \varnothing) = 0$

4° $\mu(a+b, E) = \mu(a, E) + \mu(b, E)$
$\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \mu(\lambda a, E) = \lambda \mu(a, E)$] линейно по a

Мера счётного подмн-ва $A \subset \Omega$ - счётно

Возьмём в A конечное подмн-во E_1, занумеруем элементы A. Тогда $E_1 = \{\omega_1 \ldots, \omega_m\}$
в мн-ве $A \setminus E_1$ выберем конечное под-во E_2
и т.д. // В $A \setminus (E_1 \cup E_2) = E_3$ - конечное

Построим посл-ть F_n: $F_1 = E_1$ $\quad F_2 = E_1 \cup E_2 \ldots$
.. $F_n = F_{n-1} \cup E_n$

Причем будем выбирать $E_1, \ldots E_n$ такие, что
$|F_{n+1}| = |F_n| + 1$. => $E_2 \ldots E_n$ - состоят из одного эл-та

Рассматривая $A' = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ замечаем, что в A' лежат все эл-ты A => $A' = A$

Рассмотрим конечную аддитивную меру для F_n $\quad \mu(a, F_n) = \mu(a, E_1) + \ldots \mu(a, E_n) =$ пусть $\{\omega_i\}$

$= \sum\limits_{\forall \omega \in E_1} a(\omega) + a(\omega_1) + \ldots \ldots + a(\omega_n)$

A будет иметь меру, если $\exists \lim\limits_{n \to \infty} \mu(a, F_n)$
и он не зависит от способа наполнения счетного мн-ва конеч под-вами.

Опр $S_n = \mu(a, F_n)$ - частичная сумма, $\mu(a, F_n)$
- способ суммирования

Опр Если S_n сходится, то $a : \Omega \to \mathbb{R}$ суммируема отн. выбора способа суммирования

Опр Последовательность $a: \Omega \to \mathbb{R}$ безусловно суммируема, если $\forall F_n$ $F_n \subset F_{n+1}$ и $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \Omega$ $\exists \lim_{n\to\infty} \mu(a, F_n)$ - безусл сумма.

Опр Числовой ряд - способ суммирования т.ч. $|F_{n+1}| = |F_n| + 1$

Опр Ряд сходится, если $\exists F_n$, что $\lim_{n\to\infty} \mu(a, F_n)$ - сум. Сходится безусловно, если $\forall F_n$ (опр равны) $\exists \lim_{n\to\infty} \mu(a, F_n)$. Если ряд сх, но не безусловно, то ряд сходится условно

Опр При изменении порядка сложения усл. сходимость изменится (коммут не сохр)

Опр „Необх. усл. сход. числового ряда"
Если числовой ряд сх-ся, то посл б.м $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

// частичные суммы образуют функ посл-ть

$$\boxed{\sum \frac{1}{n^{\alpha}} \quad \begin{matrix} \alpha > 1 & - \text{сход} \\ \alpha \le 1 & - \text{расход} \end{matrix}}$$

Опр Признак Раабе (сравнение с обобщ гармон. рядами)
Пусть $a_n > 0$. Если $\exists \alpha^* > 1$ $\forall n > n_0$

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \ge \alpha^* > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ - сходится}$$

или $\lim n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = R$ $\quad R > 1$ сх, $R < 1$ расход

Опр Специальный критерий сравнения

Пусть $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \dots \geq 0$

$\lim a_n = 0$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}$ сход и расход вместе с рядом

Если ряд сх, то член $2^m a_{2^m}$ должен убывать быстро

$$\sum_{\xi=0}^{\infty} b_\xi \quad ; \quad b_\xi = 2^\xi a_{2^\xi}$$

Теорема Признак Дирихле: $a_n = b_n \cdot c_n$

$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ $\quad 1^\circ.$ B_n – ограничена $\exists M > 0 \ \forall n \ |B_n| < M$

$2^\circ.$ c_n – б.м и монотонная $\forall n > n_0$

$\Rightarrow$ Тогда S_n – фундам, т.е $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится

+ Лемма $S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} B_k (c_k - c_{k-1}) + B_{n+p} c_{n+p} - B_n \cdot c_{n+1}$

Док-во $S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{k=1}^{n} c_k$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \cdot c_k$ $\qquad b_k = (B_k - B_{k-1})$

$$S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k \cdot c_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} (B_k - B_{k-1}) \cdot c_k$$

$\rightarrow$ можно переписать как

ДТ

$$|S_{n+p} - S_n| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |B_k| \, |c_k - c_{k+1}| + |B_{n+p}| \cdot |c_{n+p}| + |B_n| |c_{n+1}|$$

огр

$$\leq M \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |c_k - c_{k+1}| + M |c_{n+p}| + M |c_{n+1}|$$

Из б.м $\forall n > n_0$ $\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |c_k - c_{k+1}| = |c_{n+1} - c_{n+p}|$

$$\Rightarrow |S_{n+p} - S_n| \leq M [\, |c_{n+1} - c_{n+p}| + |c_{n+p}| + |c_{n+1}| \,]$$

$\leq 4 r M$ $\quad$ Из б.м $\forall r > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n > n_0 \ |c_n| < r$

$r < \frac{\varepsilon}{4M} \Rightarrow \forall n > N \quad |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сход

1 сл $\quad c_n$ - б.м $\quad c_n$ - мон убв

$\Rightarrow c_n > 0$

$$C_k = \sum_{n=1}^{k} c_n \qquad C_{k+1} = \sum_{n=1}^{k} c_n$$

$$C_{k+1} - C_k = c_{k+1} > 0$$

$$|C_{k+1} - C_k| = C_{k+1} - C_k$$

2 сл $\quad c_n$ - б.м $\quad c_n$ - мон возр

$\Rightarrow c_n < 0$

$$C_{k+1} - C_k = c_{k+1} < 0$$

$$|C_{k+1} - C_k| = -C_{k+1} + C_k$$

Опр Признак сравнения.

если $|a_n| \leq C_n$ при $n \geq N_0$, то если ряд $\sum C_n$ сх, то и $\sum a_n$ сх

$$\underbrace{|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}|}_{\text{сходится}} \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| \ldots + |a_{n+p}| \leq \underbrace{C_{n+1} + \ldots + C_{n+p}}_{\text{б.м}} < \varepsilon$$

необх условие

Теорема Критерий сравнения

$a_n = b_n \cdot c_n \quad 0 \leq d \leq C \leq D < \infty \Rightarrow \sum a_n$ сх и расход с b_n

Д. $\quad d(b_n + \ldots + b_{n+p}) \leq \underbrace{c_n \cdot (b_n + \ldots + b_{n+p})}_{a_n + \ldots + a_{n+p}} \leq D \cdot (b_n + \ldots + b_{n+p})$

$\sum a_n$ - сх и расх по признаку сравнения

Теорема **Признак Коши**

1) Если $a_n > 0$ $\exists n_0$ $\forall n > n_0$ $\sqrt[n]{a_n} < q < 1$, то $\sum a_n$ - сход

Д. $\sqrt[n]{a_n} < q < 1$ $\quad a_n < q^n = \frac{1}{p^n}$ $\quad p > 1$, то

$\frac{1}{q} = p > 1$ $\quad \sum q^n$ - сход

по признаку сравнения $0 \leq a_n \leq q^n$

a_n - сходится

Теорема **Предельный Признак Коши**

$\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \alpha$ $\quad \alpha < 1$ сх $\quad \alpha > 1$ расх

- $\alpha < 1$ $\exists \beta$ (из полноты действ. чисел): $\alpha < \beta < 1$

Тогда $\exists n_0$ $\forall n > n_0$ $\sqrt[n]{a_n} < \beta \Rightarrow$ сх по признаку Коши

- $\alpha > 1$ $\exists n_k$ $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \to \alpha > 1 \Rightarrow |a_{n_k}| > 1$

= сущ подпоследовательность для которой невыполнено необх условие сходимости ряда $\Rightarrow \exists$ расход подряд $\Rightarrow \sum a_{n_k}$ - расход.

Теорема. **Критерий Коши сходимости числ ряда.**

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - ряд. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ - частичная сумма.

Если $|a_{n+p} + \dots + a_{n+1}| < \varepsilon$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сход

// По опр ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если $\exists \lim\limits_{n \to \infty} S_n$

Д. По т. о фунд. сход послед: S_n - фунд

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n > n_0, p > 0$ $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| $

$\Rightarrow \left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$ $\qquad |a_{n+p} + \dots + a_{n+1}|$

Теорема Критерий сходимости пол. рядов: ряд неотриц чл. сх. $\Leftrightarrow$ его част. суммы образуют огранич. послед.

$\boxed{Д}$: $\boxed{\Rightarrow}$ $a(\omega) \geq 0$ $\forall \omega \in \underset{\text{счётн}}{\Omega} = \Omega_0 \cup \Omega^+, \omega \in \Omega_0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a(\omega) = 0$ и $\omega \in \Omega^+ \Leftrightarrow a(\omega) > 0$

Тогда $\forall E \in \underset{\text{конечн}}{\beta(\Omega)}$: $E = (E \cap \Omega_0) \cup (E \cap \Omega^+)$

$$\mu(a, E) = \underbrace{\mu(a, E \cap \Omega_0)}_{0} + \mu(a, E \cap \Omega^+)$$

$\lim\limits_{n \to \infty} \mu(a, F_n) = \mu(a, \Omega^+)$, Ω^0 - не вносит вклад

$\Rightarrow$ пусть $\Omega = \Omega^+$

. огр числовая послед $a : \Omega \to \mathbb{R}$ (счёт)

. пусть неогр, тогда она не сходится, монотонна т.к. a_n - б.м

$\boxed{\Leftarrow}$ $S_n = \mu(a, F_n) < \mu(a, F_{n+1}) \Rightarrow$ посл ч сумм монотонна и огр

$S_n = \mu(a, F_n)$ - огр $\Rightarrow$ $\exists M > 0 : S_n < M (\forall n)$

$\exists n_0 \; E < E_{n_0}$

$\Rightarrow \forall E \subset \underset{\text{огр}}{\beta_0(\Omega)}$: $\mu(a, E) < M \Leftrightarrow$ по теореме об огр. и монотонности пос-ти

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \sup \mu(a, E) \; \forall E \in \beta(\Omega)$$

Теорема Признак Абеля

$$a_n = b_n \cdot c_n$$

1°. B_n — сх, т.е $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — сх

2°. C_n: $\exists\, c = \lim_{n\to\infty} C_n$ $\forall n \geq n_0$ C_n — монотонна

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Д. $S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} B_k(C_k - C_{k+1}) + B_{n+p}C_{n+p} - B_n C_{n+1}$

1° $\exists M > 0$ $\sum_{k=n+1}^{n+p} B_k \leq M$ (B_n — сх)

2° C_n — фунд $\forall r_1 > 0$ $\forall m,n > n_0$ $|C_n - C_m| < r_1$

$\Rightarrow S_{n+p} - S_n \leq M r_1 + B_{n+p}C_{n+p} - B_n C_{n+1}$

C_n и B_n — сход $\Rightarrow$ $C_n \cdot B_n$ — сход

$\Rightarrow |B_{n+p}C_{n+p} - B_n C_n| < |M(C_{n+p} - C_n)|$

$|\underset{\text{огр}}{B_n}(\underbrace{C_n - C_{n+1}}_{< r_1})|$ — б.м C_n — фунд, B_n — огр

$|B_n(C_n - C_{n+1})| < r_2$

$\exists\; r_1 = \frac{\varepsilon}{2M}$ $r_2 = \frac{\varepsilon}{2}$

$S_{n+p} - S_n = M r_1 + r_2$

$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon \Rightarrow \sum a_n$ — сход.

Сходимость несобств интегралов.

Теорема Признак Дирихле сходимости несобств интегралов: $f(x)=g(x)\cdot\varphi(x)$

1° g и φ инт. по Риману $\forall [\delta;1] \subset (0;1]$

2° $G(x)$: $g(x)=\frac{d}{dx}G(x)$ – ограничена $(0;1]$

первообразная

3° $\exists\ \varphi'(x)$ – интегрируема $\forall\ [\delta;1]\subset(0;1]$

4° $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0$

5° $\exists U_\delta(0)$: $(0;\delta)\subset(0;1]$; $\varphi(x)$ – монотонна и не меняет знак

тут она себя так ведет

Тогда $\int_0^1 \varphi(x)g(x)\,dx$ сходится

$$= \varphi(x)\cdot G(x) - \int G(x)\cdot\varphi'(x)\cdot dx$$

$udv = uv - vdu$

Д: Пусть возьмём $1>\delta_2>\delta_1>0$ т.е $[\delta_1;\delta_2]\subset(0;1]$

Тогда $\int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)dx = \varphi(x)\,G(x)\Big|_{\delta_1}^{\delta_2} - \int_{\delta_1}^{\delta_2} G(x)\varphi'(x)\,dx$

$$\left|\int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)\,dx\right| \leq \left|\varphi(\delta_2)\cdot G(\delta_2)-\varphi(\delta_1)G(\delta_1)\right| + \int_{\delta_1}^{\delta_2} G(x)\varphi'(x)dx$$

По условию 2° $\exists M>0\ \forall x\in(0;1]\ |G(x)|<M$ – ограниченность

$$\left|\int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)dx\right| \leq |\varphi(\delta_2)|\,|G(\delta_2)| - |\varphi(\delta_1)|\cdot|G(\delta_1)| + \int_{\delta_1}^{\delta_2}|G(x)|\,|\varphi'(x)|dx$$

$$= M\left(|\varphi(\delta_2)|-|\varphi(\delta_1)|\right) + M\int_{\delta_1}^{\delta_2}|\varphi'(x)|\cdot dx \to \left(|\varphi(\delta_2)|-|\varphi(\delta_1)|\right)$$

$\xrightarrow{\text{x3}}$ из сходимости по критерию Коши $<\varepsilon_1$

По условию 4°. $\forall r>0\ \exists\delta_r\ \forall x\in(0,\delta_r)\to|\varphi(x)|<r$

$$= 2M\left(|\varphi(\delta_2)|-|\varphi(\delta_1)|\right) ⊜$$

Пусть $\delta_2<\delta_2<\delta_r$

$< 2M(|\varphi(\delta_2)| + |\varphi(\delta_1)|) < 4Mr \quad [r \leq \frac{\varepsilon}{4M}$

$\Rightarrow \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)dx < \varepsilon \Rightarrow$ из критерия Коши $\int\limits_0^1 f(x)dx$ - сходится.

Теорема **Признак Абеля** (1)

$f(x) = g(x) \cdot \varphi(x)$

1° g и φ интегр. по Риману $\forall [\delta; 1] \subset [0;1]$

2° $g(x)$ имеет огр. первообразную $G(x)$, причём $\exists S: \lim\limits_{x\to 0} G(x) = S$

3° $\exists \varphi'(x)$ - инт-ема

4° $\varphi(x): (\exists a) \lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = a$, причём $\exists \delta_0 \in (0;1]$ $\forall x \in (0;\delta_0]$ $\varphi(x)$ - монотонна

Тогда $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$ сходится

Д. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)\,dx = \varphi(x)\,G(x)\Big|_{\delta_1}^{\delta_2} - \int G(x)\,\varphi'(x)dx$$

$$\left|\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)dx\right| = |\varphi(\delta_2)G(\delta_2) - \varphi(\delta_1)G(\delta_1)| - \int |G(x)||\varphi'(x)|dx$$

из 2° т.к. $\delta_2 \to 0$ и $\delta_1 \to 0$ $\delta_k < \delta_2 < \delta_1$ $\lim\limits_{\delta_k\to 0} G(\delta_k) = S$

из 4° $\delta_k < \delta_2 < \delta_1$ $\lim\limits_{\delta_k\to 0}\varphi(\delta_k) = a$

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \varphi(x)\cdot G(x) = Sa$$

$\Rightarrow$ Для $F(x)$ выполнен критерий Коши (инт сходится) в окр $(0; \delta_M]$ $\exists \delta_M$ $\forall \delta_1, \delta_2 \in (0; \delta_M]$

$$|F(\delta_2) - F(\delta_1)| < \varepsilon$$

Т.к $G(x)$ имеет конечный предел по 2°, то в задаче доказывали, что $G(0) = S$ получим, что $G(x)$ непр на $[0,1]$

(также непр. в остал. точках т.к дифф-ема)

$\exists M > 0$ $\forall x \in [0;1]$ $|G(x)| < M$

$$\Rightarrow \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} |G(x)| \cdot |\varphi'(x)| \, dx < M(|\varphi(\delta_2) - \varphi(\delta_1)|) \right.$$

из 4° в $U_\delta(0)$ уд кр Коши:

$\forall \varepsilon_2 > 0$ $\exists \delta_{\varepsilon_2} > 0$ $\forall 0 < \delta_1 < \delta_2 < \delta_{\varepsilon_2}$: $|\varphi(\delta_2) - \varphi(\delta_1)| < \varepsilon_2$

Тогда $\left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)dx \right| < \varepsilon_1 + M\varepsilon_2$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ $\varepsilon_2 < \frac{\varepsilon}{2M}$ $\exists \delta \min\{\delta_{\varepsilon_1}, \delta_{\varepsilon_2}, \delta_{1}\}$

$\forall 0 < \delta_1 < \delta_2 < \delta \rightarrow \left| \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(x)dx \right| < \varepsilon \Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx$ сход-ся

Кратные интегралы

Лемма о понижении кратности.

Пусть Q - тело (компактное подмн-во с непустой внутр)

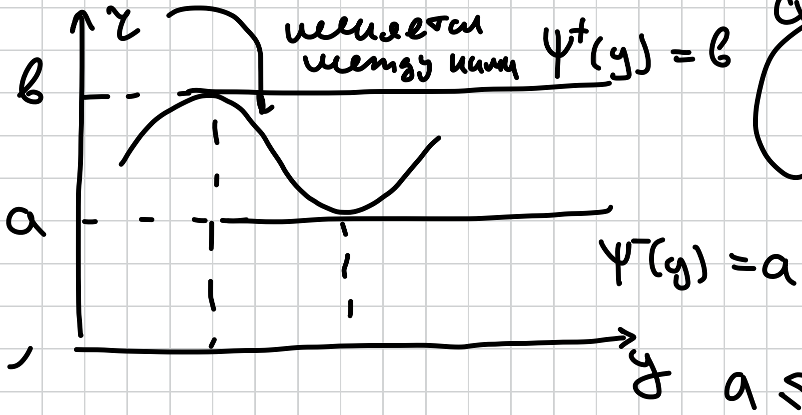
Пусть $L^{(n)} = H^{(1)} \oplus W^{(n-1)}$ в L есть объем $v^{(n)}$

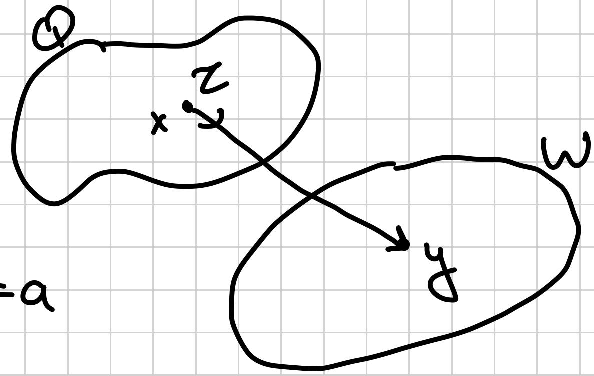
$\exists$ проекция Q на W - мн-во Ω

есть объем $V^{(n-1)}$

2d пример ↓

$H^{(1)} = z$ (высота)





$y \in W$

$x = (\tau, y)$

$(\tau, y) \in Q$

$a \le \tau \le b$ $\iff \psi^-(y) \le \psi^+(y)$

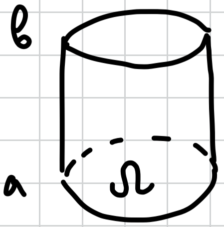
Пусть $f(x) = f(\tau, y)$ и объёмы $v^{(n)}$ и $v^{(n-1)}$ согласованы $// V^{(m+n)}(A \times B) = V^{(m)}(A) \cdot V^{(n)}(B) //$

$$v^{(n)}(\tau, y) = (b-a)\, v^{(n-1)}(W)$$

$$\boxed{\int_Q f(v^{(n)})\, dx = \int_\Omega \left(\int_{\psi^-}^{\psi^+} f(\tau, y)\, d\tau \; v^{(n-1)} \right) dy}$$

D. Пусть $\psi^+(y) = b$ $\psi^-(y) = a$ $a < b \to$ цилиндр с ровными верх краем.

(1) Докажем лемму для цилиндра:



$Q = [a, b] \otimes \Omega$

$I_1 = \int_Q f(x)\, v^{(n)}\, dx$ ↙ надо доказать, что они равны

$I_2 = \int_\Omega \left(\int_a^b f(\tau, y)\, d\tau \right) v^{(n-1)}\, dy$

I_1: Разобьём $t_1 = a < t_2 \ldots < t_{n-1} \le b = t_n$ т.е. $[a, b] = \bigcup_{i=0}^{p} [t_i, t_{i+1}]$

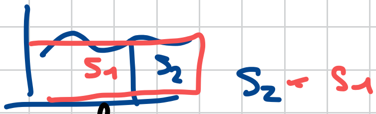
$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i \cdot v^{(n-1)}$ | $y \in \Omega$ тоже разбиваем на много штук Δ_j

$$Q = \cup\, Q_{ij}$$

Получим $Q_{ij} = \{ (\tau, y) \mid t_i \le \tau \le t_{i+1},\ y \in \Delta_j \}$

$$\int_Q f(x)\, v^n\, dx = \sum_{ij} \int_{Q_{ij}} f(x) \cdot v^{(n)}\, dx = \boxed{\sum_{ij} f(x_{ij}) \cdot v^{(n)}(Q_{ij})}$$

По теореме о среднем // $\exists \xi \in Q: \int\limits_Q f(x)\, U^{(n)} dx = \xi\, v^{(n)}(Q)$



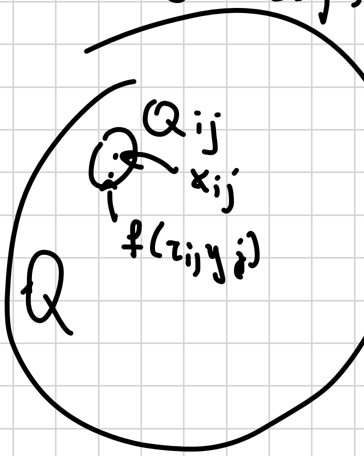
$$I_2: \int\limits_\Omega \left(\int\limits_a^b f(z,y)\, dz\right) v^{(n-1)} dy = \sum_j \int\limits_{\Delta_j} \int_a^b f(z,y)\, dz = \sum_j \int_a^b f(z,y_j)\, dz\, v^{(n-1)}(\Delta_j)$$

теор. о среднем

$$= \sum_{i,j} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(z_i,y_j)\, dz\, v^{(n-1)}(\Delta_j) = \sum_{i,j} f(z_i,y_j)(t_{i+1}-t_i) \cdot v^{(n-1)}(\Delta_j)$$

согласованное обозначение можем сказать справа

$$\boxed{= \left(\sum_{j,i} f(z_i, y_j)\, v^{(n)}(Q_{ij})\right)}$$



Оценим разность

$$\left|\sum_{ij} \left(f(x_{ij}) - f(z_i, y_j)\right) v^{(n)}(Q_{ij})\right| \leq$$

$$\leq \sum_{ij} \left| f(x_{ij}) - f(z_i, y_j)\right| v^{(n)}(Q_{ij}) <$$

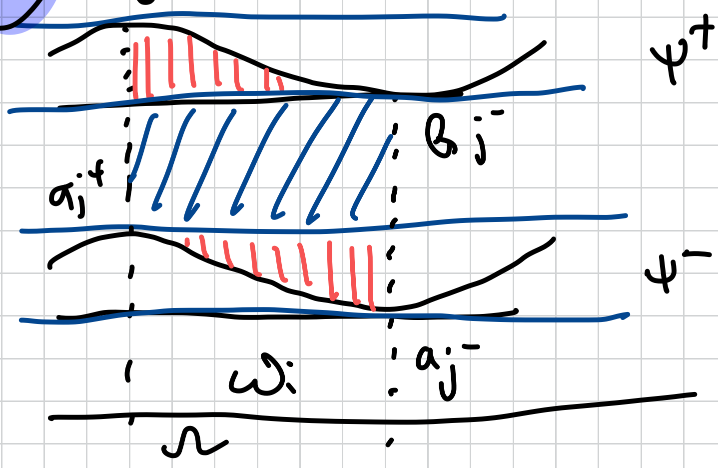
// т.к. $f(x)$ равн. непр. на Q_{ij} $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 < \operatorname{diam} Q_{ij}$

$$\to \left|f(x_{ij}) - f(z_i, y_j)\right| < \varepsilon$$

$$< \varepsilon \sum_{ij} U^{(n)}(Q_{ij}) = \varepsilon \cdot U^{(n)}(Q) < \varepsilon \to \int\limits_Q \int\limits_\Omega \int_a^b$$

---

2 B_j^+ $\quad \Omega\downarrow$



Разбиение $\Omega = \bigcup \omega_j$, порождает разбиение Q

$$Q_j = \{y \in \omega_j ;\ \psi^-(y) < z < \psi^+(y)\}$$

$\psi^+(y)$ принимает наиб. (B_j^+) и наим. (B_j^-) значение

$Q_j = Q_j^+ \cup Q_j^0 \cup Q_j^-$

$\psi^-(y)$ — — (a_j^+) и — (a_j^-) —

Про Q_j^0 — мы доказали в П. 1 (цилиндр)

$Q_j^+ = \{(z, y) \mid b_j^- \le z \le \psi^+(y) \quad y \in \Delta_j\}$

$Q_j^- = \{(z, y) \mid \psi^-(y) \le z \le a_j^+ \mid y \in \Delta_j\}$

Из св-в инт. Римана: $\int_{Q_j} = \int_{Q^+} + \int_{Q^0} + \int_{Q^-}$ (аддитивности)

$$\left| \int_{Q_j^+} f(x) v^{(n)} dx - \int_{\Delta_j} \int_{b_j^-}^{\psi^+} f(z, y) dz\, v^{(n-1)} dy \right| \le \left| \int_{Q_j^+} \right| + \left| \int_{\Delta_j} \int_{b_j^-}^{\psi^+} \right|$$

Т.к $f(x)$ непр. на Q (компакт) $\Rightarrow \exists M > 0 \ \forall x \in Q \ |f(x)| < M$

(из св-ва объемов)

$$\left| \int_{Q_j^+} \right| \le M v^{(n)} (Q_j^+) < M (b_j^+ - b_j^-) v^{(n-1)} (\Delta_j)$$

(в/из инт интеграл)

$$\left| \int_{\Delta_j} \int_a^b \right| \le \int_{\Delta_j} M(\psi^+(y) - b_j^-) v^{(n-1)} dy \le M (b_j^+ - b_j^-) v^{(n-1)} dy$$

Для Q_j^- аналогично

т.к $\psi^+(y)$ и $\psi^-(y)$ непр, то и равн непр на $\Delta \Rightarrow$

$\forall j \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |b_j^+ - b_j^-| < \varepsilon/2$ и $|a_j^+ - a_j^-| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\left| \int_Q f(x) v^{(n)} dx - \int_\Delta \int_{\psi^-(y)}^{\psi^+(y)} f(z, y) dz\, v^{(n-1)} dy \right|$$

$$= \sum_j \left| \int_{Q_j} - \int_{\Delta_j} \int_{\psi^-(y)}^{\psi^+(y)} \right| = \sum_j \left| \left\{ \int_{Q_j^0} - \int_{\Delta_j} \int_{a_j^+}^{b_j^-} + \left(\int_{Q_j^+} - \int_{a_j} \int_{b_j^-}^{\psi^+(y)} \right) \right. \right.$$

$$\left. + \left(\int_{Q_j^-} - \int_{\Delta_j} \int_{\psi(y)}^{a_j^+} \right) \right| \le \sum_j \left(M(b_j^+ - b_j^-) + M(a_j^+ - a_j^- \} v^{(n-1)}(\Delta_j) \right.$$

$$< M \cdot \varepsilon \cdot v^{(n-m)}(\Delta) - \underline{\delta \cdot m}$$