Дифгем

Ангем

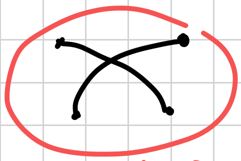
Графы / Т. о числе маршрутов / Уникурсальные графы

Опр Гладкая регулярная элем. дуга — это мн-во точек $\gamma \subset \mathbb{R}^3$, задаваемое парам-ми ур-ми $r_i = r_i(t)$, $i = 1,2,3$ ← т.к в $\mathbb{R}^3$

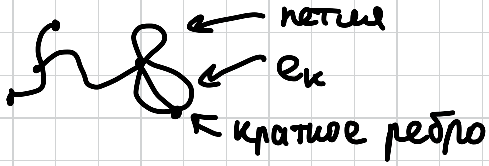
Условия:

1. $t \in [a, b]$ — элементарность
2. $r(t)$ беск. диф-ема на $[a, b]$ — гладкость
3. $\dot r(t) = (\dot r_1, \dot r_2, \dot r_3) \neq 0$ — (избежание изломов) регулярность
4. $r(t_1) = r(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$ — нет самопересечений

Опр Граф Γ в $\mathbb{R}^3$ — конечное число точек $v_1, \dots, v_n$ в $\mathbb{R}^3$, некоторые пары из которых соединены гладкими регулярными дугами, причём разные дуги могут пересекаться только в своих крайних точках v_j



нельзя



Опр Дуга наз. петлей, если она соед одну и ту же вершину.

Опр Кратное ребро — дуга, соед. две вершины

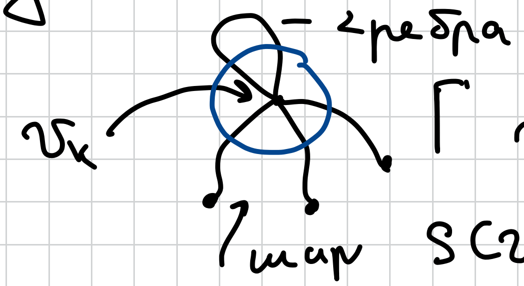
Опр Путь в графе — это цепочка конечных вершин $v_1, \dots, v_k$, причем $v_1, \dots, v_{i+1}$ соединены ребром и эти ребра указаны: $v_1, e_1, v_2, e_2 \dots, v_k, e_k$

Опр Маршрутом в Γ наз. путь, в котором каждое ребро встречается ровно 1 раз.

Опр **Правильная система маршрутов в Г** — набор маршрутов такой, что каждое ребро Г принадлежит ровно одному маршруту.

Опр **Граф Г наз связным**, если любая пара вершин в нем может быть соединена путем.

* Каждая система обладает правильным маршрутом



Г v_k - вершина

$S(v_k, \varepsilon)$ $\Gamma' = \Gamma \cap S(v_k, \varepsilon)$

Опр **Степень вершины v_k** — число ребер в Г'

Теорема **о числе маршрутов**

Пусть Г - связный граф

m - число вершин нечет. степени

S - min число маршрутов в правильной системе

$$S = \begin{cases} m/2, & m>0 \\ 1, & m=0 \text{ или } m=2 \end{cases}$$

* Число вершин нечётной степени - четно

Д * В каждой вершине неч. степени должен быть хотя бы один конечный пункт маршрута

Если это не так, то пусть через вершину нечетной степени проходит n маршрутов и ни один не заканчивается/начинается там

=> в вершину всегда входит и выходит

=> степень будет четной => противоречие

1) Пусть q — число всех конечных пунктов в правильной системе $2S \geq q \geq m$

* У любого маршрута 2 или 1 конечн пункт

$\Rightarrow S \geq \frac{m}{2}$ — ограничение сверху

2) Рассмотрим теперь правильную систему из n маршрутов (их min число)

св-ва, чтобы решить теорему:

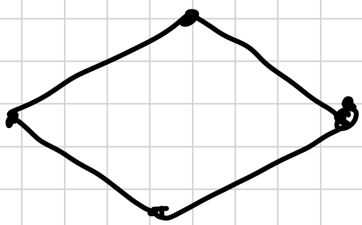
(1) В каждой вершине нечётной степени имеется не более одного конечного пункта

(Д) Если в вершину входит 2 конечного пункта, то их нужно объединить (т.к у нас min число маршрутов)

$2n+1 \rightarrow 1$

1 и 2 — объед

(2) Если $S > 1$, то кольцевых маршрутов нет



← кольцевой

(Д) Т.к маршрутов несколько, то кольцевой должен пересекаться ещё с одним маршрутом, из связности, тогда эти 2 маршрута образуют новый

$\Rightarrow S \neq S_{min}$

(3) Если $S > 1$, то в вершинах четной степени конечных пунктов нет

3) Из пункта 1 следует, что $q = m$

т.к S min, то $2S = m$, $\Rightarrow 2S = q$

$\Rightarrow \boxed{S = \frac{m}{2}}$

4) $S = 1$

1 сл: 1 кольцевой маршрут, тогда все вершины четной степени $\Rightarrow m = 0$

2 сл: не кольцевой, тогда в нач и конец вершину нечет раз, $m = 2$

Опр Граф Г наз. уникурсальным, если $S = 1$

min число маршрутов

Лемма Пусть e - число ребер, v_k - кол-во вершин степени k, тогда:

$$2e = \sum_{k=0}^{\infty} k v_k$$

(о рукопожатиях)

Д Каждое ребро связано с двумя вершинами, значит оно считается по одному разу в обеих этих вершинах (или 2 раза в одной)

$e = \sum \underset{\text{степень}}{k} \cdot v_k = 2e_1 + \dots + 2e_i$

* Число вершин нечетн степени четно

Д Пусть нет, тогда m - нечет в. n - чет в.

j - четно, i - нечет

$$\underbrace{\sum j m_j}_{\text{чет}} + \underbrace{\overset{\text{нечет раз}}{\sum i n_i}}_{\text{нечет}} = \underbrace{2(e)}_{\text{чет}}$$ - противоречие

Число Бетти, Эйл хар-ка графа. Минимальное дерево. Теорема о системе токов.

Опр На графе Г задана **система токов**, если для ∀ ребра Г указано направление и задано неотриц число x, причем для каждой вершины выполняется 1 закон Кирхгофа:

$$\boxed{\sum_{\text{входящ}} x_i - \sum_{\text{выход}} x_j = 0}$$

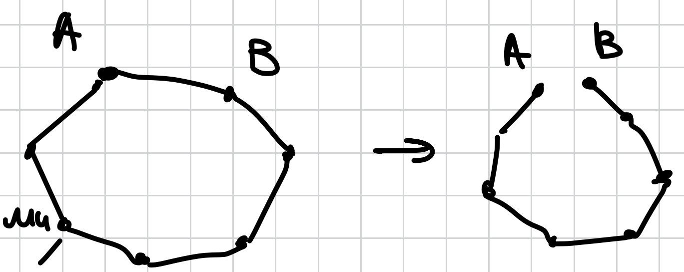
Опр Цикл в графе Г - это замкнутый маршрут $v_1, e_1, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1}$ такой, что $v_1 = v_{k+1}$

Опр Дерево - связный граф без циклов

Опр Максимальное дерево исходного графа - это такое дерево, которое содержит все вершины Г и какое-то подмн-во ребер исходного

Задача. Если в любом связном графе, не являющимся деревом, из цикла удалить ребро, то он не перестанет быть связным

Д Рассмотрим цикл:
в нём ∀ 2 вершины соединены 2 разными путями



удалили один путь, мы оставляем возможность добраться до ∀ другой через другой

Лемма. В любом дереве найдется вершина степени 1

Д Пусть нет, тогда мы вышли из v_1 и дальше идём по вершинам, т.к их степень ≥ 2, и мы либо попадем в вершину, в которой были, либо будем идти бесконечно, но число вершин конечно $\Rightarrow$ противоречие

Опр b_1 – 1-е число Бэтти (цикломатическое число) графа Г – число перемычек.

Опр Перемычки – ребра, которые нужно стереть в исходом графе, чтобы получить максимальное дерево

Теорема Пусть Г – связный граф, тогда:

$$\boxed{v - e = 1 - b_1}$$

Д Рассмотрим сначала макс дерево,

- База: $v = 2 \quad e = 1 \quad v - e = 1$
- Предположение: для n – верно $v_n - e_n = 1$
- Шаг: пусть для $n+1$ верно, утверждение – есть вершина степени 1, удалим её вместе с ребром $\Rightarrow$ n – макс дерево для него выполнено $v_n - e_n = 1$, когда добавляем ту вершину с ребром $(v_n + 1) - (e_n + 1) = v_n - e_n = 1$

Теперь поймем, что из определения числа

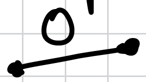
бэтти — это число ребер которое нужно удалить до макс дерева, поэтому

$v_н = v \qquad e_н = e + b_1$

$$v_н - e_н = \underbrace{v - e}_{1} - b_1 = 1 - b_1$$

Теорема Если граф — дерево, то на нём существует только нулевая система токов.

Д В дереве сущ вершина степени 1, сумма токов для $\forall$ вершины 0 $\Rightarrow$ по ребру течет ток 0, удаляем это ребро, дерево остается $\Rightarrow$ опять нашлось ребро, по нему ток 0

База 

Предположение в n-дереве у всех ребер 0

Шаг рассмотрим $n+1$-дерево, найдем (← ток 0) вершину с степенью 1 и удалим её (с ребром), сумма на n-дереве 0, добавим эту вершину и ребро - он тоже ноль $\Rightarrow$ $n+1$ - все ребра 0 $\Rightarrow$ нет системы токов

только нулевая ←

Планарные графы / Непланарность K_5 и $K_{m,n}$ $(m,n \geq 3)$

Опр Граф Γ наз плоским, если все его ребра и вершины лежат в одной плоскости ($\dim = 2$)

Опр Γ и Γ' изоморфны, если $\exists$ биекции $F: v \to v'$ и $G: \varepsilon \to \varepsilon'$

(e соединяет v_1 и v_2 в Γ) $\Longleftrightarrow$ ($G(e)$ соединяет $F(v_1)$ и $F(v_2)$ в Γ')

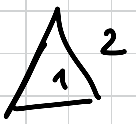
Опр 16 Граф Γ планарный, если Γ изоморфен плоскому графу

Теорема Формула Эйлера

Для любого плоского графа (планарного)

$$v - e + f = 2,$$ где

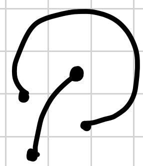
f - число областей

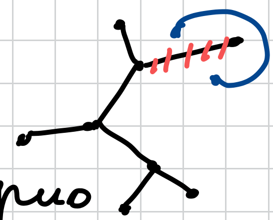


$f = 2$

Д 1) Докажем для дерева Γ: $v - e = f$, т.е $f = 1$

База  $2 - 1 + 1 = 2$





Предположение пусть для m верно

Шаг рассмотрим $m+1$ и уберем вершину степени вместе с ребром $f_н = f$ $v_н = v + 1$ $e_н = e + 1$ $v_н - e_н = v - e = f = f_н$ ✓

2) Для произвольного

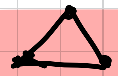
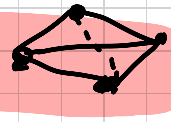
Мы можем получить дерево путем стирания перемычек. Сотрем одну перемычку :

$v_н = v$ $\quad e_н = e - 1$ $\quad f_н = f - 1$
↑убирает 1 цикл

$\Rightarrow$ $v_н - e_н + f_н = v - e + f = 2$

Если перемычек n-то аналогично.

Опр **Полный граф** с n вершинами K_n — набор из n вершин, причём каждая пара различных вершин соединена ребром

Пример: K_2  K_3  K_4 

Утв Если есть непланарный подграф, то граф непланарный (без петель и кратных ребер)

$\Rightarrow$ K_n непланарный, если $n \geq 5$

Д Пусть K_5 - планарный, тогда выполняется ф-ла Эйлера: $v - e + f = 2$ $\quad v = 5$, $e = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

$\Rightarrow f = 7$

Чтобы образовать f нужно минимум △

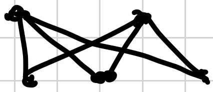
каждое ребро граничит максимум → $2 \cdot e \geq 3 \cdot f$
↑минимум для образования

$20 \geq 21$ — противоречие $\Rightarrow$ непланарный

// немного про подграф, пусть вышло построить плоский, ну сотрем всё до подграфа, вот проблема, не могли получить //

Опр **Двудольный граф** $K_{n,m}$ — мн-во m+n вершин, которое распределено на 2 группы из n и m вершин, причём каждая

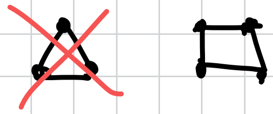
Вершина 1й группы соединена с каждой вершиной 2й группы, а внутри групп ребер нет.

Пример: $K_{2\,3}$ 

Утв Граф $K_{n,m}$ непланарный при n и $m \geq 3$

Д Пусть планарный $K_{3\,3}$ => ф-ла Эйлера

$v - e + f = 2$ $\quad v = 6$

для f_{min}  $\quad e = 3 \cdot 3 = 9$

$\Rightarrow f = 5$

$2e \geq 4f$

$18 \geq 20$ – противоречие

Утв Пусть Г – планарный связный граф без петель и кратных ребер. Тогда в Г всегда $\exists$ вершина степени ≤ 5

Д Пусть нет $\quad \dim(v_{min}) = 6$

$2e \geq v \cdot 6 \qquad 2e \geq 3 \cdot f \qquad v - e + f = 2$

$v \leq \frac{e}{3} \qquad f \leq \frac{2}{3} e$

$\frac{e}{3} - e + \frac{2}{3} e \geq 2$

$0 \geq 2$ – противоречие

Раскраски карт и графов / Теорема о пяти красках

Опр На графе Г задана правильная раскраска, если каждой вершине сопоставлен цвет, причем вершины соединенные ребром, раскрашены в разные цвета.

Замечание:

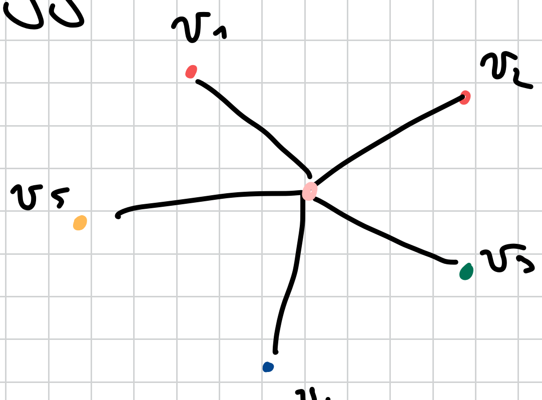
1. На графе с петлями не существует правильной раскраски
2. Кратные ребра не влияют на раскраску

Теорема Пусть Г — планарный граф без петель и кратных ребер и тогда ∃ правильная раскраска Г в не более, чем 5 цветов.

Д. База для $v \le 4$, то красим все в разные

Предположение пусть для m верно

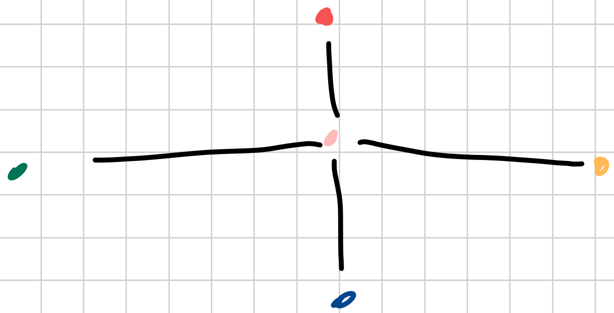
Шаг $m+1$, т.к граф планарный, то сущ вершина степени ≤ 5, рассмотрим её удаление



Имеем ли мы возможность покрасить их не в разные цвета?, только если какая-то вершина не связана с другой, но если все связаны между собой, то это K_5 — не планарный

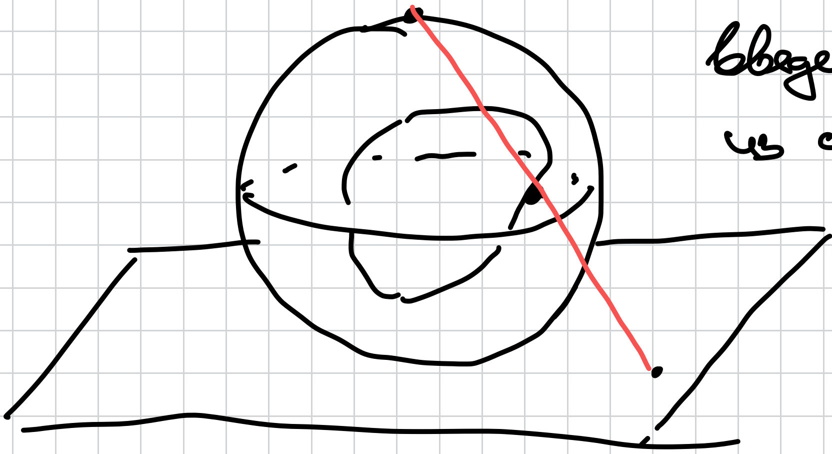
Тогда v_2 и v_1 пусть не связаны

Теперь для $V \leq 4$: просто красим вершины в 4 разных цвета и, когда новую добавляем, то красим в пятый цвет (для меньше 4 очевидно)



Комментарий (от сферы в двумерную плоскость)

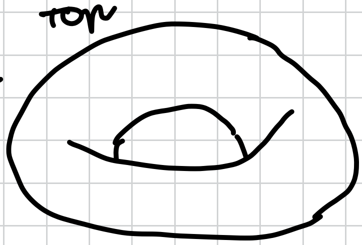
сфера касается в сот полюсе



Введем отображение из северного полюса => переход к задаче на плоскости

Задача Привести пример карты на поле, для к-й 5 цветов правильной раскраски недостаточно.

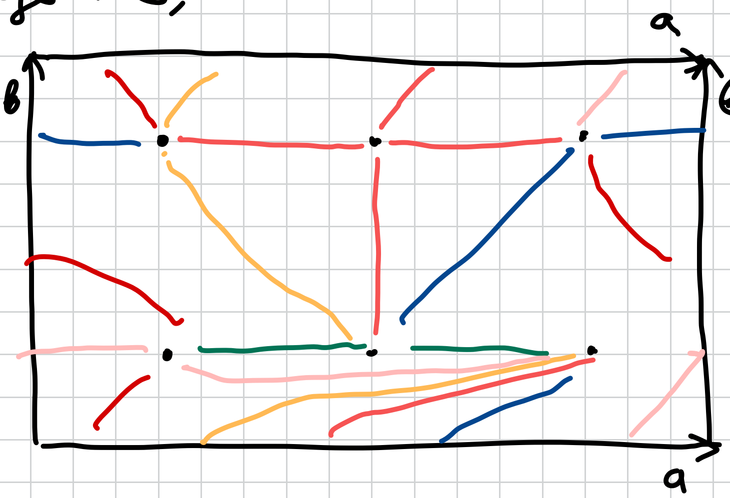
Рассмотрим K_6, пусть он планарен, тор изоморфен плоскому графу на торе



поскольку степень вершины 5,

то нужно min 6 цветов,

когда все со всеми



Замкнутые кривые на плоскости / Регулярная гомотопия кривых
Теорема Уитни – Граущтейна

Опр Гладкая регулярная плоская кривая – это мн-во точек пл-сти, задаваемое параметрическими ур-ми: $x = r(t)$ $(x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t))$

1. $t \in [a, b]$ (конечный кусок)
2. $r(t)$ – беск. дифф ф-ия (гладкая)
3. $\dot r(t) \neq 0$ (регулярная)
4. $r(t_1) = r(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$ (нет самопересечений $\Rightarrow$ плоская)

Опр Пусть $\gamma_0 : x_0 = r_0(t)$, $\gamma_1 : x_1 = r_1(t)$. Кривые γ_0 и γ_1 регулярно гомотопны, если $\exists$ векторная ф-я $r(t, \tau)$ такая, что

1. $t \in \mathbb{R}$, $\tau \in [0, 1]$ и $r(t, \tau)$ – беск дифф
2. для $\forall\ \tau$ фикс. $\in [0, 1]$ ур-е $x = r(t, \tau)$ задают гладкую регулярную замкн. кривую
3. $r(t, 0) = r_0(t)$
   $r(t, 1) = r_1(t)$

Опр ф-ции r_1 и r_2 – эквивалентны, если $\exists\ \tau > 0$
$r_1(t) = r_2(\tau)$
параметр $\begin{pmatrix} \tau' > 0 \\ t' > 0 \end{pmatrix}$

Замечание Одно и тоже мн-во точек можно задать разными параметр. ур-ями, делая гладкие замены параметра по ф-ле $t = \varphi(\tau)$, где φ – беск. дифф-я функция (изменение скорости точки по кривой)

(перевод одного времени в другое)

Опр Длиной дуги кривой γ между точками t_1 и t_2 γ наз. число ℓ:

$$\boxed{\ell = \int_{t_1}^{t_2} |r'(t)|dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt}$$

Задача Длина дуги не зависит от параметризации $\Leftarrow$ из ф-ип замены переменной в интеграле

Ньют-лейб:

$$\ell = \int_{t_1}^{t_2} |r'(t)|dt = R(t_2) - R(t_1) \qquad R'(t) = r$$

Замена: $t = \varphi(\tau) \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \varphi(\tau_1) \\ t_2 = \varphi(\tau_2) \\ dt = \varphi'(t)\cdot d\tau \end{cases}$

$$\ell' = \int_{\tau_2}^{\tau_1} |\underbrace{r'(\varphi(\tau))}_{t}| \cdot \underbrace{\varphi'(\tau)\cdot d\tau}_{\substack{d\varphi(\tau) \\ "dt}} = R(\underbrace{\varphi(\tau_2)}_{t_2}) - R(\underbrace{\varphi(\tau_1)}_{t_1})$$

Замечание.

в мат. анализе длина определяется как точная верхняя грань длин, вписанную в кривую ломаных.

Опр Параметр $S \in [a, b]$ гладкой параметр. кривой $r(s)$ наз. натуральным, если величина $s - a$ равна длине дуги между точками $r(a)$ и $r(s)$ для $\forall\ s \in [a, b]$

* Действует как изометрия (длины не меняются), но не преобр все пр-во, а только кривую - сохр длину дуги.

$$\boxed{S - a = \int_a^s \underbrace{\left|\frac{dr(\tau)}{d\tau}\right|}_{1} \cdot d\tau}$$

1 – условие нат параметра

$$\boxed{S(t) = \int_{t_1}^{t_2} |r'(t)|\, dt}$$

* Если есть любая гладкая регулярная кривая, то на ней есть натур. параметр

Св-ва натурального параметра S:

1. Если $v(s) = r'(s)$, то $|v| = 1 \longleftrightarrow \left|\frac{dr}{ds}\right| = 1$

$r(s)$ – натуральная параметризация γ

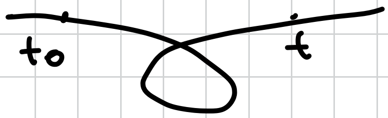
$r(t(s))$ $\qquad \dot{S}(t) = |\dot{r}(t)|$ $\qquad$ По теор. об обр.:

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \qquad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{dS}{dt}} = \frac{1}{|r'(t(s))|}$$

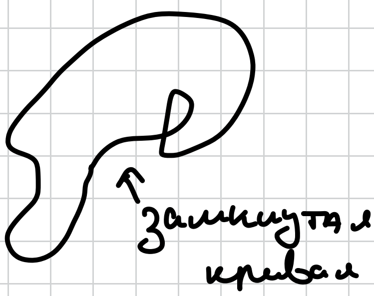
$$|v(s)| = \frac{dr}{ds} = r'(t(s)) \cdot \frac{1}{|r'(t(s))|} = 1$$

2. Если мы введем натур. параметр, то в качестве параметра у нас выступает длина дуги, т.е. за единицу времени проходим единицу длины.

Замечание



Значение параметра в конечной точке t = длине дуги до t



В натур. параметризации период $p(S)$ = длине кривой

Опр ф-ция $f(t)$ - периодическая, если
$f(t+T) = f(t)$, T — период

(3) Достаточно рассматривать $T = T_{min} > 0$

Задача Доказать, что если $f(t)$ — периодическая, не $\neq$ const, и хотя бы непр, то сущ минимальный полож период

$$f(t+T) = f(t) \text{ - периодическая } \forall t \in \mathbb{R}$$

$\mathbb{T} = \{T > 0 \mid f(t+T) = f(t)\}$ - мн-во всех полож периодов.

Докажем существование inf этого мн-ва.

Если $T_{min} = 0$, то из непрерывности следует, что $f = const \Rightarrow T_{min} > 0$

противоречие

Пусть $\{r_n\}$ - пос-ть периодов таких, что $r_n \to T_{min}$

тогда верно, что

$$f(t + T_{min}) = f((t + T_{min} + r_n) - r_n) =$$
$$f(t + (T_{min} - r_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(t)$$

Св-ва периодических ф-ций:

(1) Линейная комбинация T-периодических функций, T - периодична.

$$F(t) = \alpha_1 f_1(t+T) + \ldots \alpha_n f_n(t+T) = \alpha_1 f_1(t) + \alpha_n f_n(t)$$

(2) Произведение T-периодических фун-ций — T-периодична.

$$F(t) = \varphi(t)\, g(t) \Rightarrow F(t+T) = \varphi(t+T)\, g(t+T) =$$
$$= \varphi(t) \cdot g(t) = F(t)$$

3. Производная T-периодической ф-ции T-периодична

$$f(t+T) = f(t) \to \frac{d}{dt} f(t+T) = \frac{d}{dt} f(t)$$

$$\frac{d}{dt}(t+T) \cdot f'(t+T) = f'(t)$$

4. $$\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt$$

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_a^T f(t)\,dt + \int_T^{T+a} f(t)dt \xrightarrow{\substack{\text{Замена} \\ t = y+T}}$$

$$\int_a^T f(t)\,dt + \int_0^a f(\underbrace{y+T}_{y})\,dt \xrightarrow{y=t-T} \int_0^a f(\underbrace{t-T}_{t})dt + \int_a^T f(t)dt$$

$$= \int_0^T f(t)\,dt$$

Опр Среднее значение T-периодической функции:

$$\boxed{\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\,dt}$$

5. Пусть $F(t)$ - первообразная от T-периодич ф-ции, тогда $F(t) = t\langle f \rangle + F_0(t)$, где $F_0(t)$ - периодич

Пусть $F(t) = \int_0^t f(t)\,dt$, тогда рассмотрим, введём $F_0(t)$:

$$F_0(t) = \int_0^t f(t_1)\,dt_1 - \frac{t}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

$$F_0(t+T) - F_0(t) = \int_0^{t+T} f(t_1)dt_1 - \frac{\cancel{t}+T}{T}\int_0^T f(t_1)\,dt_1 -$$

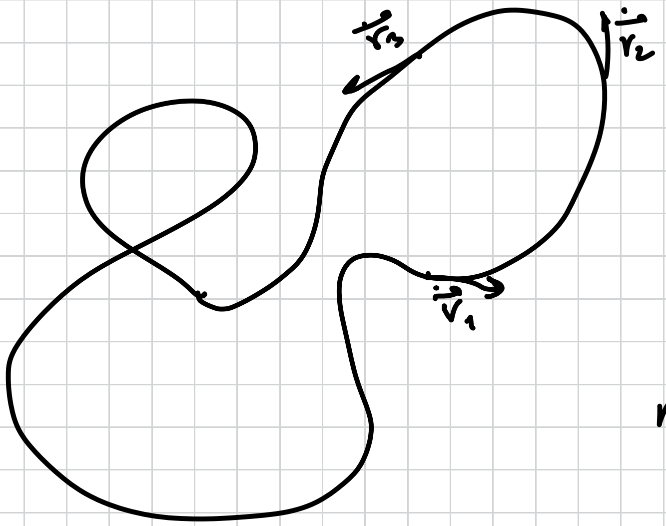
$$\int_0^t f(t_1)dt_1 + \frac{\cancel{t}}{T}\int_0^T f(t_1)\,dt_1 = \int_t^{t+T} f(t_1)dt_1$$

$$= \int_t^{t+T} f(t_1)\,dt_1 - \int_0^T f(t_1)\,dt_1$$

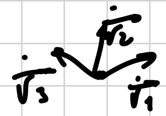
из 4 $\Rightarrow \int_0^T f(t_1)\,dt_1 - \int_0^t f(t_1)\,dt_1 = 0$

$$F_0(t+T) = F_0(t)$$

Опр Число вращений кривой γ – число оборотов вектора скорости m.



Будем из одной точки проводить все вектора.



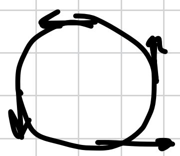
Если рассмотреть нат параметризацию, то мы будем двигаться по окр-ти единичного радиуса

При возвращении в исх. точку вектор совершит целое число оборотов

По часовой «+»

Против часовой «–»

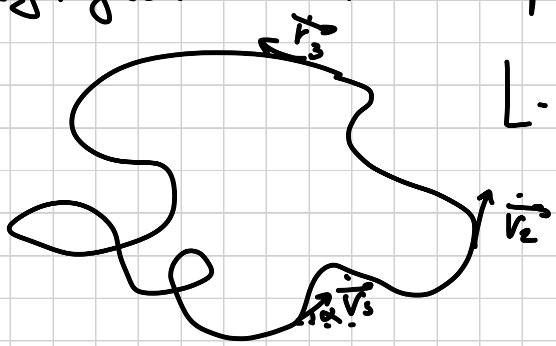
Ор-сть



$m = 1$

Если задано парам. ур-е. Как посчитать m?

Зададим нат параметр $x = \rho(s)$



L - длина

$$v(s) = \begin{cases} \cos\alpha(s) \\ \sin\alpha(s) \end{cases}$$

Когда будем обходить кривую

против часовой стрелки, то -2π к $\alpha(s)$,

по часовой, то $+2\pi$ к $\alpha(s)$

$$\underbrace{\alpha(L+s)-\alpha(s)=2\pi m}_{\text{сколько было полных оборотов}}$$

Опр ф-ция $\alpha(s)$ - угловая функция кривой γ

$$\alpha(L)-\alpha(0)=\int_0^L \alpha'(s)\,ds=\int_0^L (v',n)\,ds=2\pi m$$

$$v'(s)=\alpha'(s)\begin{pmatrix}-\sin\alpha(s)\\ \cos\alpha(s)\end{pmatrix}=\alpha'(s)n$$

$$n(s)=\begin{pmatrix}-\sin\alpha(s)\\ \cos\alpha(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-v_2\\ v_1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{(v',n)=\alpha'\underbrace{(n,n)}_{=1}}$$

$$\boxed{\begin{gathered}m=\frac{1}{2\pi}\left(\alpha(s+L)-\alpha(s)\right)\\ m=\frac{1}{2\pi}\int_0^L (v',n)\,ds\end{gathered}}$$

Теорема Уитни-Грауштейна

γ_1 и γ_0 - регулярно гомотопны $\Leftrightarrow$ $m_0=m_1$

Д $\boxed{\Rightarrow}$ $\gamma_0: x=r_0(t)$ $\gamma_1: x=r_1(t)$, пусть имеется регулярная гомотопия

$r(t,\tau)=x$, $m(\tau)=m(\gamma_\tau)$

Посчитаем $m(\tau)$ - число вращений функции $m(\gamma_\tau)$

$\tau\in[0;1]$ $m(0)=m_0$ $m(1)=m_1$,

Поскольку $m(\tau)=\underset{\text{(целое)}}{\text{const}}$ и ф-я непр, то

$m_0=m_1$

(будет либо дробное, либо нет целых)

$\boxed{\Leftarrow}$ Параметризуем кривые натур. параметром s: $x = r(s) \to \ell \approx r(s)$ (растягиваем кривую)

При помощи рег. гомотопии: $L(\gamma_0) = L(\gamma_1)$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0(s+L) &= \alpha_0(s) + 2\pi m_0 \\ \alpha_1(s+L) &= \alpha_1(s) + 2\pi m_1 \end{aligned}\right\} \nearrow$$

деформируем угл. ф-ции

$\alpha(s,\tau) = \tau\alpha_1(s) + (1-\tau)\alpha_0(s)$

$\tau = 0$: $\alpha(s,0) = \alpha_0(s)$

$\tau = 1$: $\alpha(s,1) = \alpha_1(s)$

$$\alpha(s+L,\tau) - \alpha(s,\tau) = \tau\alpha_1(s+L) + (1-\tau)\alpha_0(s+L_1) - (\tau(\alpha_1(s) + 1(1-\tau)\alpha_0(s)) = \tau\alpha_1(s) + \tau\cdot 2\pi\cdot m_1 + (1-\tau)\alpha_0(s) + (1-\tau)2\pi m_0 - \tau\alpha_1(s) - (1-\tau)\alpha_0(s)$$

$$= 2\pi((1-\tau)m_0 + \tau m_1) \overset{m_1 = m_0}{=} 2\pi m_0$$

$$\alpha(s+L,\tau) - \alpha(s,\tau) = 2\pi m_0$$

Зададим вектор скорости

$$v(s,\tau) = \begin{cases} \cos(\alpha,\tau) \\ \sin(\alpha,\tau) \end{cases} \quad (*)$$

$\nearrow$ беск. дифф-емая, единичная, периодическая

При $\tau = 0$ параметрические ур-е γ_0

При $\tau = 1$ ——— ——— γ_1

$$v(s+L,\tau) = v(s,\tau), \quad \text{т.к. } m = m_0$$

След. шаг состоит в восстановлении парам-их ур-ий кривой по вектору скорости.

$$r(s,\tau) = \int_0^s v(s,\tau)\, dS_1$$ — период при $\tau = 0$ и $\tau = 1$

Нужно, чтобы она всегда была периодической

=> вычтем из неё линейную ф-цию

Тогда $$r(s,\tau) = \int_0^s v(s,\tau)\, dS_1 - S \langle v(s,\tau)\rangle$$

— эта кривая замкнута, т.к $r(s,t)$ беск. дифф и периодич.

$$r(s+T,\tau) = \int_0^{s+T} v(s,\tau)\, dS_1 - \frac{s+T}{T}\int_0^T v(s,\tau)\, dS_1$$

$$= \int_0^s v(s_1,\tau)\, dS_1 + \cancel{\int_s^{s+T} v(s_1,\tau)\, dS_1} - \frac{s}{T}\int_0^T v(s_1,\tau)\, dS_1 - \cancel{\int_0^T v(s_1,\tau)\, dS_1} = r(s,\tau)$$

Проверим, чтобы вектор скорости кривой $\gamma(\tau)$ не обращался в нуль

$$\dot r = \underset{\substack{\parallel \\ 1}}{v(s,\tau)} - \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T v(s,2)\, ds}_{\leq 1 \text{ const по отн к } s} \neq 0$$

хотим

(см (*))

Убедимся, что $\langle v\rangle < 1$

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T v(s,\tau)\, ds\right| = \left(\frac{1}{T}\int_0^T v(s,\tau)\, ds, \vec e\right) \circleddash$$

$$\vec e = \frac{\vec v}{|\vec v|} \Rightarrow |\vec v| = (\vec v, \vec e)$$

$$\circleddash \left|\frac{1}{T}\int_0^T (v,e)\, ds\right| \leq \frac{1}{T}\int_0^T |(v,e)|\, ds \;(<)$$

// Поскольку $v(s) \neq \text{const}$ (*) => непр-ая ф-ция

=> $(v,e) \neq \text{const}$ =>

$|(v,e)| \leq |v||e| = 1$ – нер-во Коши-Шварца

На некоторых отрезках $|(v,e)| < 1 \Rightarrow \langle |(v,e)| \rangle < 1$ //

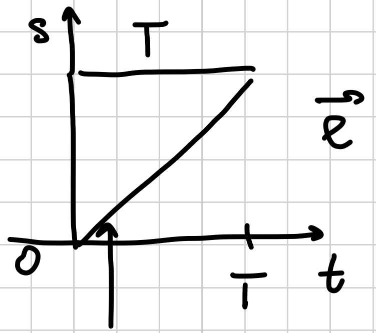
$\textcircled{<}$ $\frac{1}{T}\int_0^T ds = 1 \Rightarrow$ вектор скорости не обращ. в нуль

Семейство кривых определяет нужную гомотопию

Теорема Хопфа

Пусть на γ нет точек пересечения, тогда $m(\gamma) = \pm 1$, т.е γ рег. гомотопна окружности.

Д Пусть $t \in [0,1]$ рассмотрим на мн-сти (t,s). Пусть $|v| = 1$, $\gamma : r(t)$ треугольник, сопоставим каждой точке (t,s) единич. вектор $\vec{e}(t,s)$ по правилу:



касательная

$\dot{r}(t) = e(t,t)$

гипотенуза

$$\vec{e}(t,s) = \begin{cases} \dfrac{r(s)-r(t)}{|r(s)-r(t)|}, & \text{если } (t,s) \in (t = s) \text{ и } (t,s) \neq (0,T) \\ \dot{r}(t), & \text{если } (t,s) \in \{t = s\} \\ -\dot{r}(0), & \text{если } (t,s) = (0,T) \end{cases} \quad (*)$$

(*) Получим из того, что $e(t,s)$ гладкая ($\gamma(t)$ без т. пересечений) $r(s) \neq r(t)$ при $s = t$, тогда из непр-ти ф-ции e из первого условия получим при $s \to t$

$$\vec{e}(t,s) = \frac{r(s)-r(t)}{|r(s)-r(t)|} \cdot \frac{|s-t|}{s-t} = \frac{r(s)-r(t)}{s-t} \cdot \left| \frac{s-t}{r(s)-r(t)} \right| -$$

$s \to t$ $\quad \frac{\dot r(t)}{|\dot r(t)|} = \dot r(t)$ $\Leftrightarrow$ на гипотенузе

$|\dot r(t)| = 1$ из деф

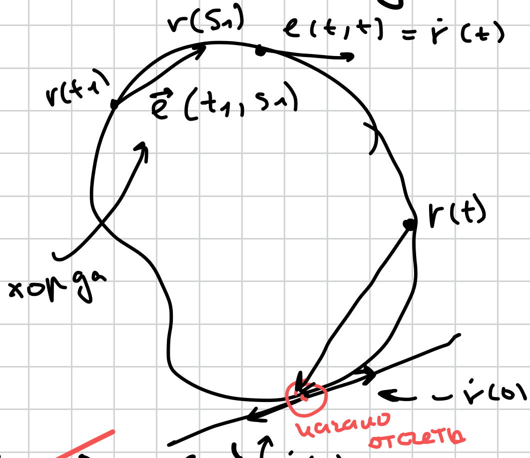
$e(t,t) = \dot r(t)$, $s = t$

в вершине $r(0) = r(T)$ – неопределенность $\frac{0}{0}$ при $s = T$, $t \to 0^+$

$e(0,T) = -\dot r(0)$ при $s \to T^-$

Теперь запишем $e(t,s) = \begin{cases} \cos\alpha(t,s) \\ \sin\alpha(t,s) \end{cases}$ где $\alpha(t,s)$ непр в треуг-ке

Число вращений $m(\gamma)$ – число оборотов вектора $e(t,t) = \dot r(t)$ при изменении t вдоль гипотенузы тр-ка



$$m = \frac{1}{2\pi}\left(\alpha(T,T) - \alpha(0,0)\right)$$

или можно считать m через катеты:

$$m = \frac{1}{2\pi}\left((\alpha(T,T) - \cancel{\alpha(0,T)}) + (\cancel{\alpha(0,T)} - \alpha(0,0))\right)$$ $\dot r(0)$

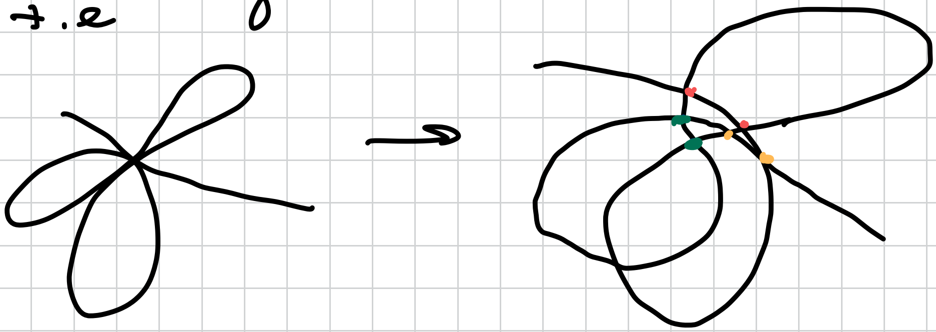
$\exists$ прямая ℓ такая, что γ лежит в одной из полуплоскостей от неё: ℓ касается γ, т.к γ не имеет изломов $\forall p \in \gamma$ и не пересекает, т.к γ не имеет самопересечений

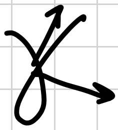
$\alpha(T,T) - \alpha(0,0)$ – угол поворота вектора $r(T) - r(t) = r(0) - r(t)$

Получается, что угол между $\dot r(0)$ и $-\dot r(0) = \pm\pi$

тогда $m = \frac{\pm(\pi + \pi)}{2\pi} = \pm 1$

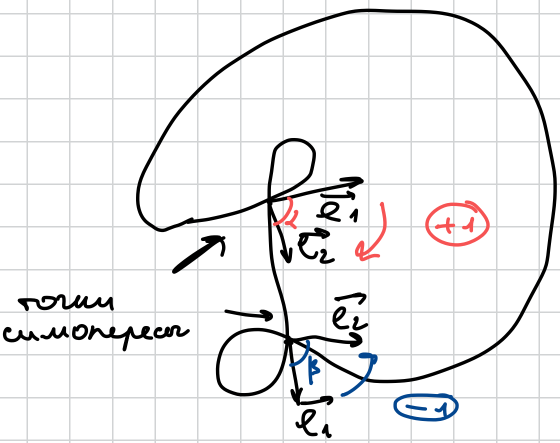
Будем считать, что т самопересечения двойные, т.е γ

1) 

2)  — вектор лин. независ.

Если 1 и 2 выполняются

$\varepsilon = 1$, $\varepsilon = -1$



Припишем каждой т. пересечения

$$P \to \varepsilon(P) = \begin{cases} 1, & \text{если по часов} \\ -1, & \text{если против часовой} \end{cases}$$

Опр Число Уитни

$$\boxed{W(\gamma, P_0) = \sum_P \varepsilon(P)}$$

* Оно зависит от исх. точки

Задача Четность $W(\gamma, P_0)$ противоположна четности $m(\gamma)$, если γ будет обходится против часовой стрелки $m = +1$.

Сначала рассмотрим P_j точку самопересечения и её окр-ть.

Возьмем точку отсчета в ней. Теперь пойдем по всей кривой и вернёмся в неё же, чтобы вернуться в $\vec{e_1}$ мы должны были совершить вращение, аналогично для $\vec{e_2}$ $\Rightarrow m(\gamma) \geq 2$

При этом:

1) Если т. самопересечения одна, то $W(\gamma, p_0) \in \pm 1 \Rightarrow m(\gamma) = 2$ четность противоположна

2) Если 2 и более, то $m(\gamma)+1$ $W(\gamma, p_0) \pm 1$ — четность у обоих сохраняется

нужно $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$

Задача 2 Получить ф-лу для $W(p_0)$ через $m(\gamma)$:

следует из утв выше:

$$\boxed{m(\gamma) = W(\gamma, p_j) - 1}$$

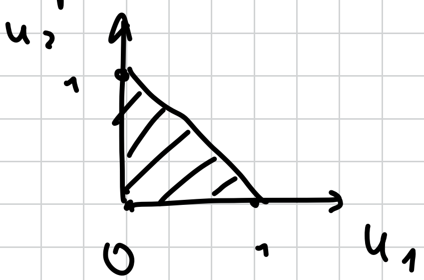
∞

$m=0$

$W=1$

Триангул двум. пов-ти. Ориент и Неориент пов-ти.

Опр Станд 2-симплекс — невырожденный тр-к на пл-ти



$$\begin{cases} u_1 \geq 0 \\ u_2 \geq 0 \\ u_1 + u_2 \leq 1 \end{cases}$$ все т. треуг

Опр Край станд. симплекса - объед 1-граней

Опр Станд симплекс ориент, если задано направление обхода его 1-граней

Опр Криволиней 2-симплекс в $\mathbb{R}^n$ — мн-во $M \subset \mathbb{R}^n$, задаваемое пар-ми ур-ми

$x = r(u)$ $\qquad$ $x_1 = x_1(u_1, u_2)$,
$\dots$
$x_n = x_n(u_1, u_2)$

Причем:

1) $u = (u_1, u_2) \in$ станд 2-симплексу
2) $r(u)$ $\quad (x_i(u))$ — беск дифф-ма (гладкость)
3) $\frac{\partial r}{\partial u_1}$ и $\frac{\partial r}{\partial u_2}$ линейно незав (регулярность)
4) $r(u) = r(u^*) \Leftrightarrow u = u^*$ (без самопересеч)

Опр Криволинейный симплекс ориентирован, если ориентирован параметризующий его станд. симплекс

Опр Связная триангулируемая 2-пов-сть в $\mathbb{R}^n$ — мн-во $M \subset \mathbb{R}^n$ представимое в виде объединения конечного числа криволин. 2-симплексов $M_1, \dots, M_s$

причём. 1) $M_i \cap M_{i+1} = \begin{cases} \varnothing \\ \text{ровно одна целая грань либо (0- или 1-грань)} \end{cases}$

2) каждая 1-грань $\in$ не более, чем двум симплексам

3) для $\forall$ пары симплексов A и B $\exists$ цепочка симплексов $M_{i_1}, \dots M_{i_k}$ такая, что $A = M_{i_1}$ $B = M_{i_k}$ и $M_{i_l} \cap M_{i_{l+1}} = 1$-грань

4) Пусть $A \cap B = P = 0$-грань, тогда цепочку можно выбрать так, что $P \in$ всем симплексам.

Опр Пусть M - триангулируемая пов-ть, тогда 1-грань наз **внутренней**, если $\in$ 2 симплексам, **краевой** - одному.

Опр **Край M** - это объединение его краевых 1-граней.

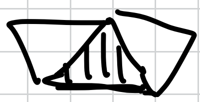
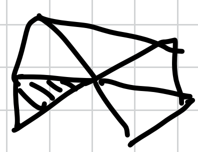
Задача Д-ть, что край любой M - объед конечного числа замкн цепочек 1-граней.

Край M - это $\cup$ краевых 1-граней, по опр пов-сть - это $\cup$ конечного числа симплексов.

База 1 симплекс

Предположение для n - верно

Шаг Рассмотрим $n+1$, найдется симплекс, у которого есть 1 внешняя грань, сотрем его

а)  б)  Для n - верно, дальше мп

либо меняем 2 1-грани на 1 1-грань

либо 1 1-грань на 2 1-грани, замкнутая цепочка должна вернуться в ту же вершину, из которой вышли.

Опр На пов-сти M задана ориентация, если ориентация задана на каждом симплексе (выбрано направление обхода его края), причём если 2 симплекса пересекать по ребру, то их направления должны быть противополож.

Опр Пов-то M наз ориентируемой, если $\exists$ её ориентация

Опр Замкнутая цепочка симплексов сохр ориентацию, если в конце обхода ориент совпадают, обращает, если не совпадают

Задача M ориентируема $\Leftrightarrow$ когда $\forall$ замкн цепочка симплексов сохр ориент.

$\boxed{\Rightarrow}$ Пусть на симплексе M_i из замкн цепочки симплексов задана ориент 1, задающая ориент на остальных симплексах цепочки

Пусть на M_{i+1} задана ориент 2 такая, что ориентации 1 $\uparrow\uparrow$ 2, поскольку M_i и M_{i+1} входят в замкнут цепочку симплексов, то они пересекаются по 1-грани $\Rightarrow$ обращают ориентацию $\Rightarrow$ $\exists$ два симплекса на м-ти такие, что направления у 1-граней идет в одну сторону => M - неориент.

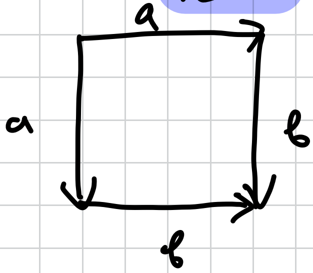
$\Leftarrow$ Пусть M неориентируема => $\exists$ хотя бы одна пара [illegible] симплексов M_i и M_{i+1}, пересекающихся по 1-грани => они явл элементами цепи, образ ориентацию => в цепочке образ ориент

Примеры склеек из квадрата

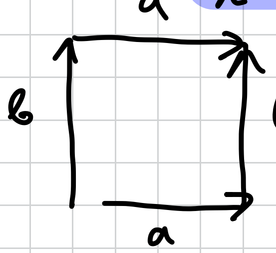
$\boxed{\chi = V - E + F}$

↑ эйлерова х-ка

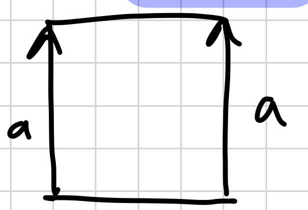
Сфера S^2 $\chi = 2$



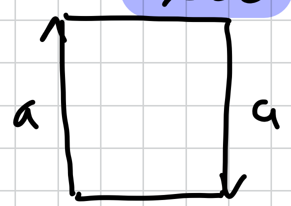
Тор T^2 $\chi = 0$



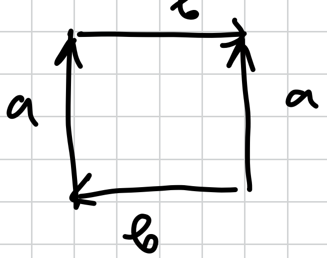
Цилиндр Cl^2 $\chi = 0$



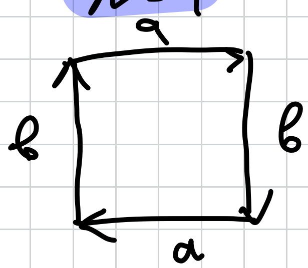
Лента Мебиуса $\chi = 0$ μ^2



Бутылка Клейна $\chi = 0$ Kl^2



Проективная пл-сть $\chi = 1$ Rp^2



Операции с пов-стями

I **Вырезание дырки** (убрать один 2-симплекс или диск)

$\chi = \chi_{\text{исх}} - 1$

$\chi = v - e + f(-1) = \chi_{\text{исх}} - 1$

II **Склейка пов-тей по 1-граням (внешним)**

$\chi(M+N) = \chi(M) + \chi(N)$

$\chi(M+N) = f_M + f_N - (e_M + e_N - e_{\text{общие}}) + (v_M + v_N - v_{\text{общие}}) = \chi(M) + \chi(N)$

III Приклейка ручки

1) Вырезать дырку в M (−1)

$\chi_{\text{ручки}} = -1$

2) Приклеить в дырку ручку (−1)

$$\chi(M+N) = \chi(M_{\text{исх}}) - 2$$

IV Приклейка ленты Мебиуса

1) Вырезать дырку (−1)

2) Вклеить ленту Мебиуса (+0)

$$\chi(M+N) = \chi(M) - 1$$

Теорема классификации компактных двум-ых ориент. и неориент. пов-тей.

Опр Пусть $f: M_1 \to M_2$

отображение непр в т. P, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$: для $\forall$ $S(f(P), \varepsilon)$ т. $f(P) \in M_2$ найдется такая $S(P, \delta)$, что

$$f(S(P,\delta) \cap M_1) \subset S(f(P), \varepsilon)$$

Опр Отображение f наз гомеоморфизм M_1 и M_2, если f - биекция и f и f^{-1} непр.

Опр Пов-ти M_1 и M_2 гомеоморфны, если $\exists$ гомеоморфизм

Теорема Любая ориентируемая пов-ть гомеоморфна одной из M_g^k (сфера с g ручками и k дырками)

Д * произв-ую ориент пов-ть M, сначала из неё сооружим диск

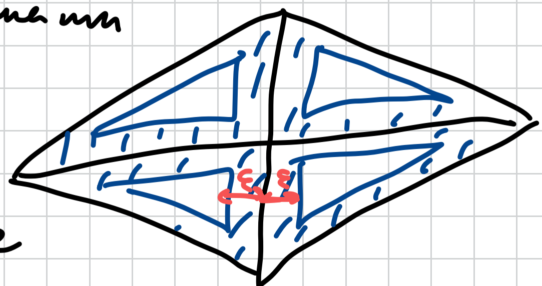
* на M граф γ, разбивающий её на диски (например, граф триангуляции)

Теперь возьмем такое $\varepsilon > 0$, что получим мн-во $M_\varepsilon = \{P \in M \mid S(P, \gamma) \leq \varepsilon\}$ – "окр-ть графа" – M_ε

расстояние между графом и точками

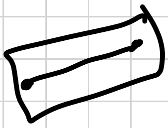
1) Заменим M на M_ε

2) Сделаем дерево из графа γ: разрежем перемычки, т.е



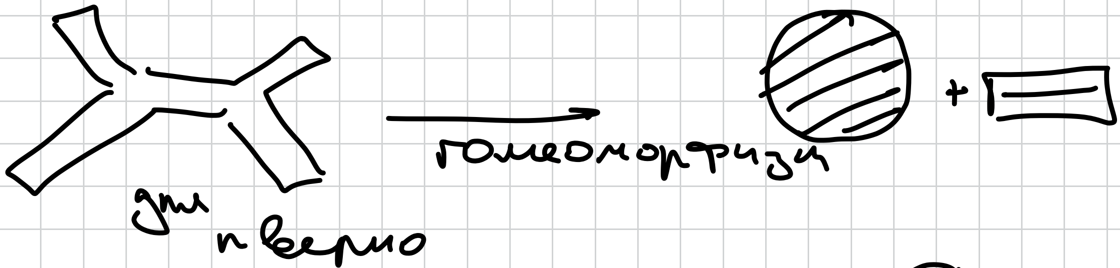
удалим маленькие прямоуг. из ленты

Докажем что такая ок-ть дерева гомеоморфна диску

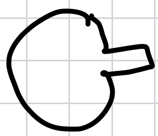
• База 

• Предположение верно для n вершин

• Рассмотрим n+1 вершину, удалим вершину степени 1 и ребро от неё



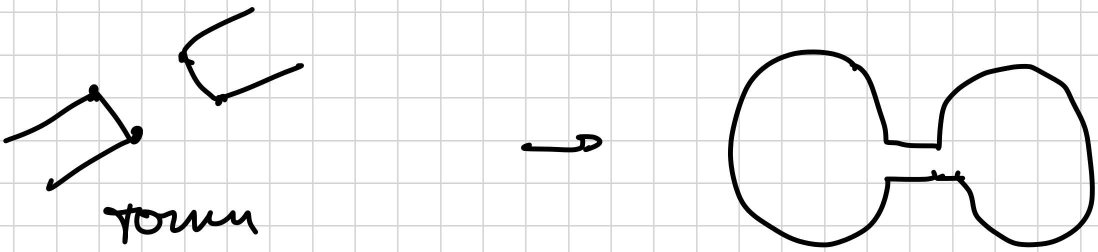
– все равно гомеоморфно диску



– тоже диск

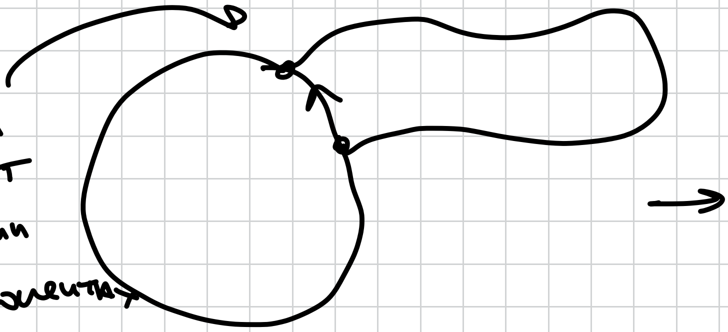
Теперь сделаем последовательно обратные операции. склеиваем перемычки

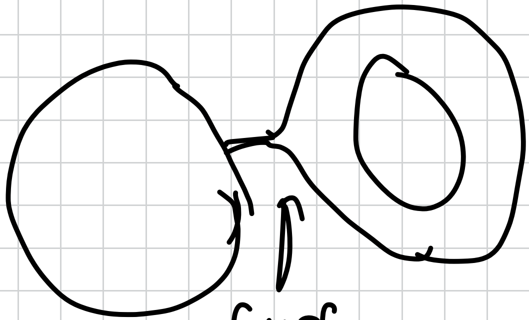
• Надо разрезать пов-ть, когда мы разрезаем мы заклеиваем дырку диском



точки лежат на разных компонентах края

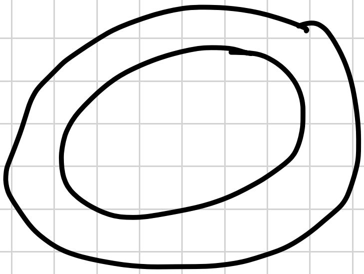
При склеивании вырезаем дырку → применим операции I и II точки лежат на один компонент края



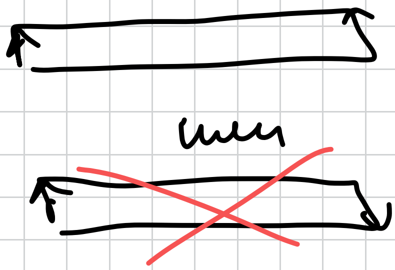


Снова операции I и II

Рассмотрим:



Теперь разрежем эту ленточку

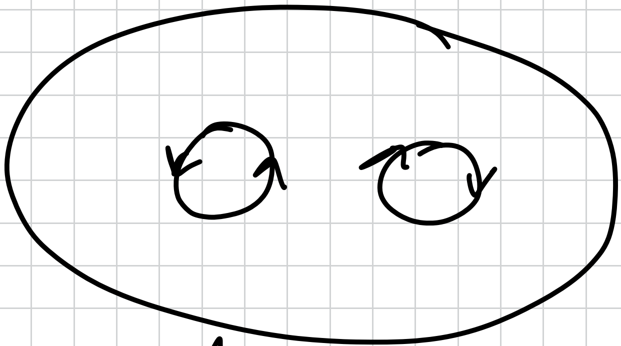


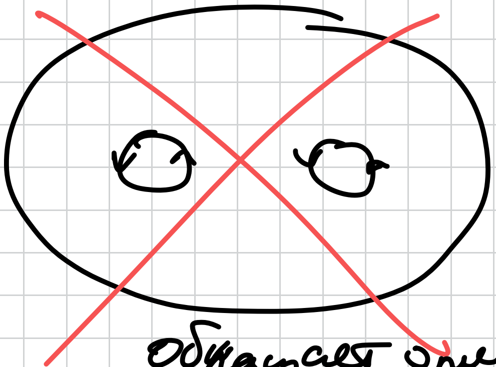
цилиндр

или

обращает ориентацию

Теперь приклеим цилиндр в пов-сть.





приклейка ручки

III операция

обращает ориент

Таким образом мы склеим пов-ть M из диска последовательным выполнением операций.

Очев, что диск гомеоморфен сфере с дыркой

стереограф проекция

Теорема Любая неориент. пов-ть гомеоморфна одной из пов-тей N_S^k

дырка

k

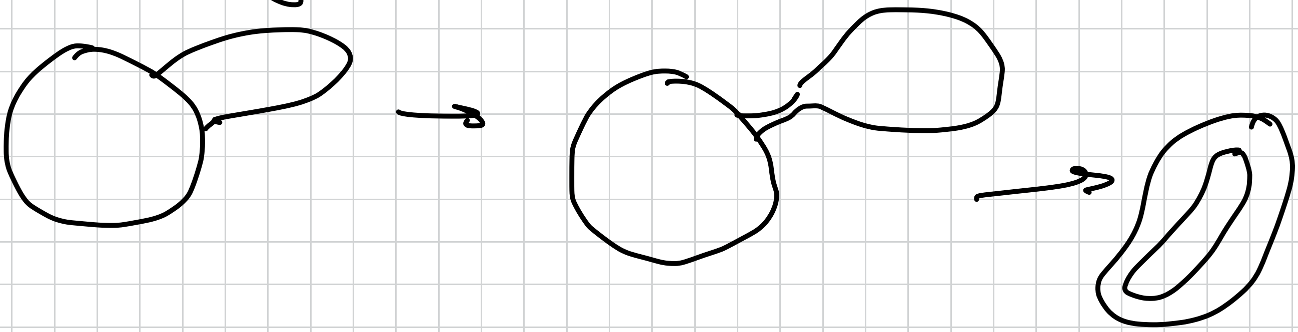
S – лент Мебиуса

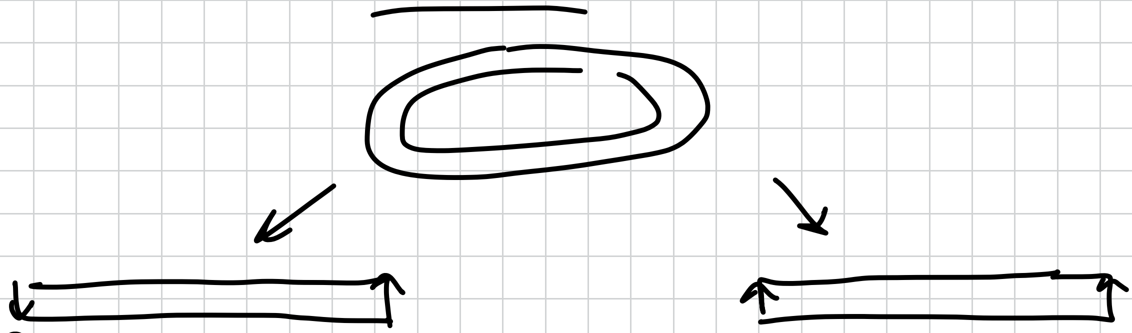
Д

Снова делаем диск
Теперь рассмотрим, что происходит при склейке перемычек.

Если точки на разных компонентах шли, то вырезаем дырку.

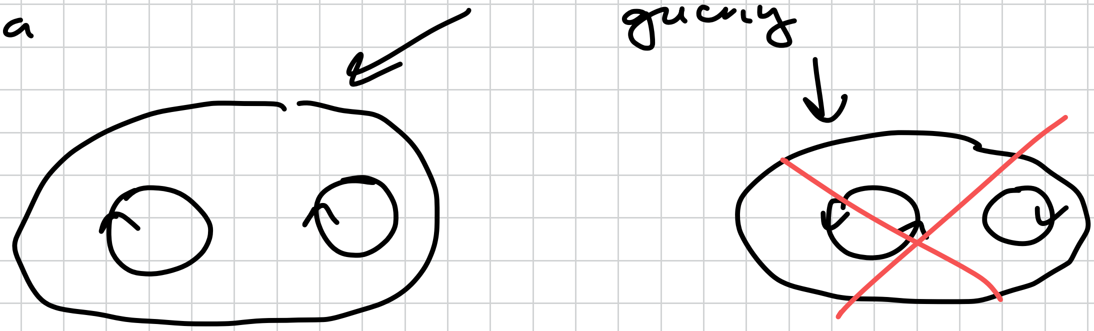
Если на одной:



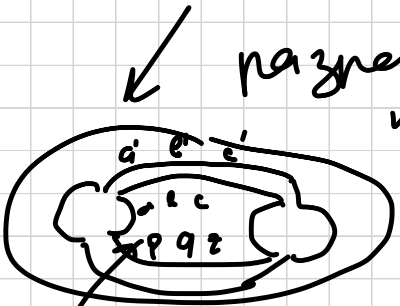


Вклейка ленты Мебиуса

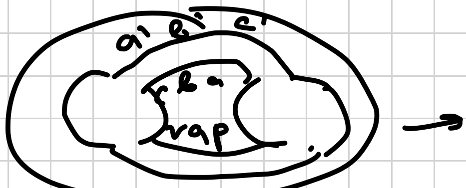
Если гомеоморфна диску



разрежем пов-сть по таким кривым



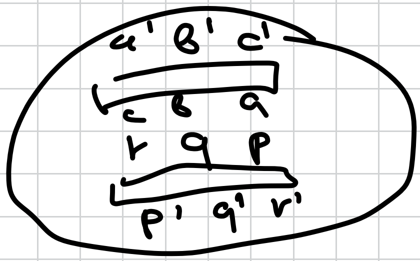
развернем его на 180°



p' q' r' p' q' r'

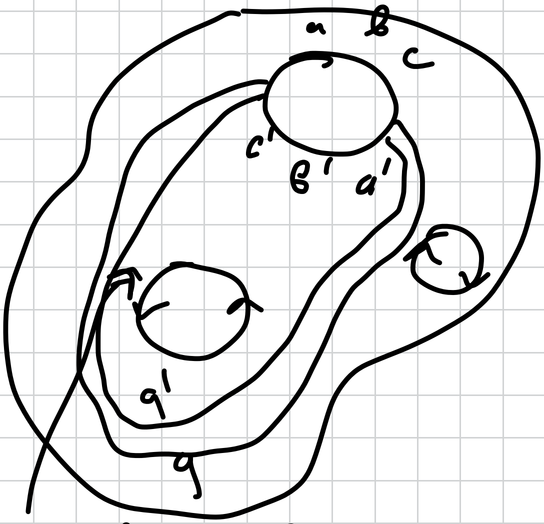
вырезал этот кусок, теперь вклеим его обратно

склеим стрелочки →



эквив приклейке 2 лент мебиуса

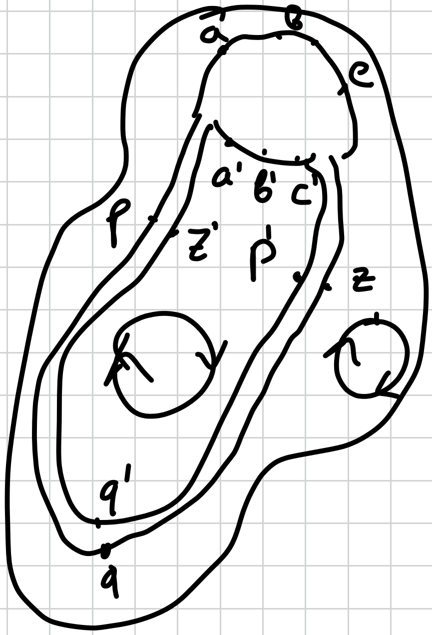
* Убедимся в том, что приклейка ручки (если уже есть л. мебиуса) ⟺ приклейке 2-х лент Мебиуса ещё

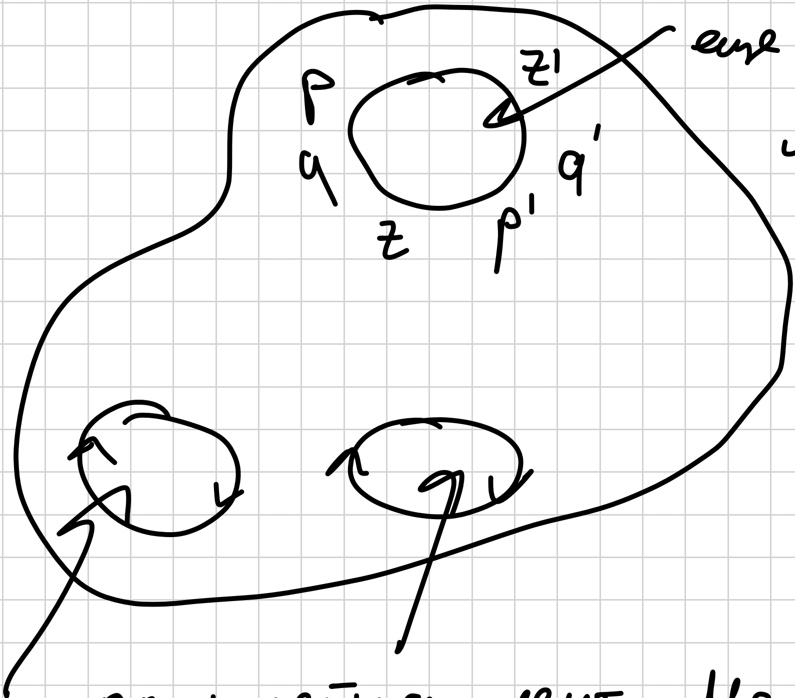


снова вклеили кусок

вклеим → развернув на 180

это склеим





ещё одна лента мебиуса

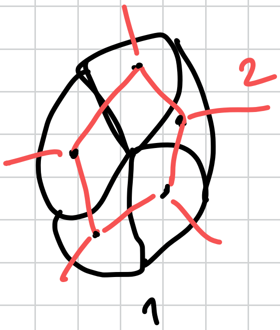
приклейка лент Мебиуса

Опр Эйлерова х-ка χ над

$$\boxed{\chi = v - e + f}$$

Задача χ не зависит от графа

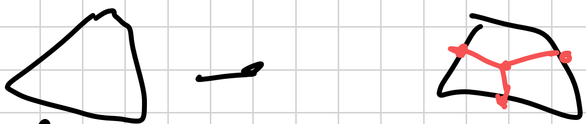
возьмём два графа на M, разбивающие её на диски, причем вершины одного графа лежат внутри областей другово



Тогда получим новый граф, но с более мелким разбиением

Рассмотрим сначала 1 граф
исходно в графе было v, e, f

База 1 симплек



$\chi_1 = v - e + f$

$\chi' = (v+4) - (e+6) + (f+2) = v - e + f$

Предположение для n вершин верно

Шаг докажем для $n+1$

Сотрем вершину, получим n, для которого выполняется: $\chi_1 = \chi'$

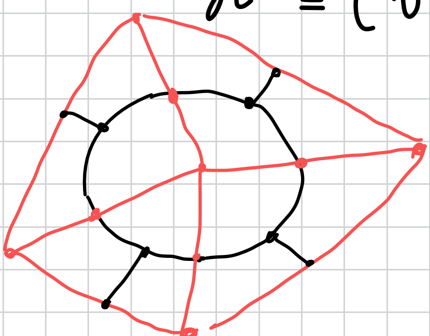
степень удаленной вершины

$$\chi_1 = v - e + f \xrightarrow[\text{вершин}]{\text{удаление}} \chi_1 = (v-1) - (e-n) + (f-(n-1))$$

Восстановим χ', т.е. каждое ребро поделим на пополам и добавим вершин

$$\chi' = (v+1+2n) - (e+2n+3n) + (f+3n-1) = v - e + f$$

с χ_2 аналогично



Плоские кривые / Касательные и нормаль / Длина кривой / Натур. параметр.

Опр Гладкая регулярная элементарная кривая в $\mathbb{R}^n$ — мн-во точек $\gamma \subset \mathbb{R}^n$, задаваемое парам-скими ур-иями.

1) $t \in [a, b]$ (элементарная)
2) $r(t)$ – беск дифф (гладкая)
3) $\dot r(t) \neq 0$ (регулярная)
4) $r(a) = r(b) \Rightarrow a = b$ (без самопересеч)

Опр Длина дуги кривой между т. t_1 и t_2

$$\boxed{\ell = \int_{t_1}^{t_2} |\dot r(t)|\, dt}$$

Опр Натуральный параметр $s(t)$ – длина дуги, отсчитываемая от фикс. точки t_0

$$\boxed{s(t) = \int_{t_0}^{t} |\dot r(t')|\, dt'}$$

$v = \rho(s)$ – натур. параметризация, если $|v| = 1$

Опр Касательной к кривой $r = r(t)$ в т t_0 наз. предельное положение секущей, проходящей через точки t_0 и $t_0 + \Delta t$ при $\Delta t \to 0$

т.е прямая проходящая через т. t_0, причём её единичный направл. вектор равен пределу единичных направляющих векторов данной секущей

Опр Направляющим вектором касательной к кривой $r = r(t)$ в т. t_0 является её вектор скорости $r'(t_0)$

Уравнение касательной: $r = r'(t_0)\cdot\tau + r(t_0)$

, где $\tau \in \mathbb{R}$ - параметр на ней

Запишем (нормированный) направляющий вектор секущей:

$$\frac{r(t_0+\Delta t) - r(t_0)}{|r(t_0+\Delta t) - r(t_0)|} \stackrel{\frac{\Delta t}{\Delta t}}{=} \frac{\frac{r(t_0+\Delta t)-r(t_0)}{\Delta t}}{\frac{|r(t_0+\Delta t)-r(t_0)|}{\Delta t}} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \frac{r'(t_0)}{|r'(t_0)|}$$

$\Rightarrow$ $r'(t_0)$ - направляющий вектор кас-ой и кас. проходит через точку $r(t_0)$

Каноническое ур-ие касательной

$$\boxed{\tau = \frac{r - r(t_0)}{r'(t_0)} \Rightarrow \frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}}$$

Опр **Нормалью к кривой** в точке t_0 наз. прямая, проходящая через эту точку и перпендикулярная касательной к ней

- направляющий вектор нормали $(-y'(t_0), x'(t_0)) \perp$ направляющему вектору касательной $(x'(t_0), y'(t_0))$

$$\begin{cases} x = x'(t_0)\cdot\tau + x(t_0) \\ y = y'(t_0)\cdot\tau + y(t_0) \end{cases} \Rightarrow \frac{x - x(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{x'(t_0)}$$

Соприкасающаяся окр-ть. Кривизна плоской кривой. Плоские формулы Френе.

Опр Кривые γ и $\tilde{\gamma}$ имеют касание порядка k в точке s_0, если натуральные параметры этих кривых можно выбрать так, что

$$r(s) - \tilde{r}(s) = \bar{o}((s-s_0)^k)$$

Утв (две кривые γ и $\tilde{\gamma}$ имеют касание порядка k в т. s_0) $\longleftrightarrow$ (когда нат. параметр можно выбрать так, что $r(s_0) = \tilde{r}(s_0), \dots, r^k(s_0) = \tilde{r}^k(s_0)$)

Д

$$r(s) - \tilde{r}(s) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}(s-s_0)^j (r^j(s_0) - \tilde{r}^j(s_0)) + o((s-s_0)^k)$$

разность по опр. должна равняться остат. члену в форме Пеано.

$\boxed{\Rightarrow}$ все разности $r^{(j)}(s_0) - \tilde{r}^{(j)}(s_0)$ должны обратиться в нуль по опр.

$\boxed{\Leftarrow}$ все разности в нуле $\Rightarrow$ остался ост. член $\Rightarrow$ опр.

Лемма Пусть $a(t)$ гладкая n-мерная, вектор-ф-я завис. от параметров $a = (a_1(t), \dots, a_n(t))$, причём $|a(t)| = c = \text{const}$, тогда:

$$\boxed{\dot{a} \perp a}$$

Д $c^2 = (a, a)$ возьмем произв. $0 = (\dot{a}, a) + (a, \dot{a}) \Rightarrow$

$$2(\dot{a}, a) = 0$$

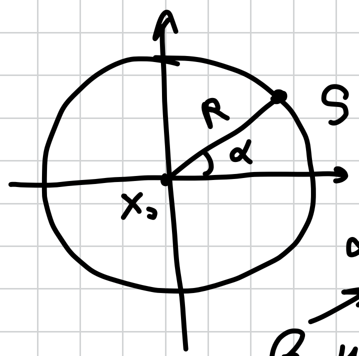
Следствие Пусть $r = r(s)$ – нат. параметризация кривой, тогда $\boxed{r'' \perp r'}$

$r' = 1$ $(r', r') = 1$ $2(r'', r') = 0$

Теорема Пусть γ — плоская кривая и пусть в точке S_0 $r''(S_0) \neq 0$, тогда $\exists!$ окр-ть, имеющая касание с кривой в т. S_0 второго порядка.

1. её центр лежит на нормали к γ в направлении $r''(S_0)$
2. её радиус $R = \dfrac{1}{|r''(S_0)|}$

Д Рассмотрим окр-ть радиуса R с центром x_0, тогда пар-ское ур-ие:



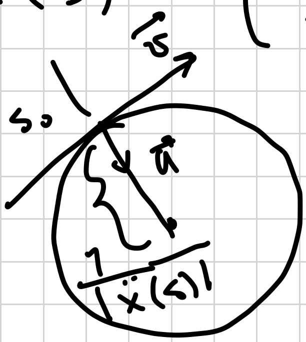
$\alpha = \frac{S}{R}$ в нат. параметр.

$$x = x_0 + R\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$x = x_0 + \begin{pmatrix} R\cos s/R \\ R\sin s/R \end{pmatrix}$$

$$\dot{x}(s) = 0 + \begin{pmatrix} \cancel{R}\cdot -\sin s/R \cdot \left(\frac{s}{\cancel{R}}\right)' \\ \cos s/R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin s/R \\ \cos s/R \end{pmatrix}$$

$$\ddot{x}(s) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R}\cos s/R \\ -\frac{1}{R}\sin s/R \end{pmatrix} = -\frac{1}{R}\begin{pmatrix} \cos s/R \\ \sin s/R \end{pmatrix}$$



$$\ddot{x}(s) = \left|\frac{1}{R}\right| \cdot \begin{pmatrix} \cos s/R \\ \sin s/R \end{pmatrix}$$

$$\boxed{R = \frac{\left|\begin{pmatrix} \cos s/R \\ \sin s/R \end{pmatrix}\right|}{|\ddot{x}(s)|} = \frac{1}{|\ddot{x}(s)|}}$$

$$\sqrt{\left(\begin{pmatrix} \cos s/R \\ \sin s/R \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos s/R \\ \sin s/R \end{pmatrix}\right)} = \sqrt{\cos^2 s/R + \sin^2 s/R} = 1$$

Единственность: (от противного) $R_1 = R_2$

Опр Такая ок-сть наз. соприкасающейся окр-стью кривой, её центр — центр кривизны γ, радиус — радиус кривизны γ

Опр Пусть $r''(s_0) \neq 0$, тогда $\vec{n} = \frac{r''}{|r''|}$ — вектор нормали, а пара векторов $[\vec{v}, \vec{n}]$ — репер Френе

базис по

Теорема Плоские ф-лы Френе

Во всех точках кривой, где выполняется $v \neq 0$

$$\boxed{\begin{cases} v' = k \cdot n & (1) \\ n' = -kv & (2) \end{cases}}$$

в натур. параметризации

где $k = \frac{1}{R} = |r''|$ — кривизна

Д

$$v' = r'' \qquad n = \frac{r''}{|r''|}$$

$$k = |r''| \quad \Rightarrow v' = k \cdot n$$

$$(n', n) = 0 \quad \Rightarrow \quad n' = \alpha \cdot v$$

$$(v, n) = 0$$

$$(v', n) + (v, n') = 0$$

$$(kn, n) + (v, \alpha v) = 0$$

$$k\underbrace{(n, n)}_{=1} + \alpha\underbrace{(v, v)}_{=1} = 0$$

$$k = -\alpha$$

$$\alpha = -k$$

$$\Rightarrow \quad n' = -kv$$

$$\parallel \begin{pmatrix} -\sin\alpha(s) \\ \cos\alpha(s) \end{pmatrix}$$

Теперь рассмотрим ф-ю $\tilde{n} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$ и зададим кривизну таким образом

$$\tilde{k}(s) = \begin{cases} k(s), & \text{при } \tilde{n} = n \\ -k(s), & \text{при } \tilde{n} = -n \\ 0, & \text{при } r'' = 0 \end{cases}$$

Утв Тогда ф-ции $\tilde{n}, \tilde{k}$ - беск. дифф. и ф-лы Френе выполняются во всех точках

$$v' = \tilde{k}\tilde{n} \to \tilde{k} = (v', \tilde{n})$$

скалярно домножим на $\tilde{n}$

Теорема

1\. Пусть $\tilde{k}(s)$ - произвол. гладкая ф-ция на $[0, L]$. Тогда $\exists$ плоская кривая γ такая, что $\tilde{k}$ - ф-ция её кривизны

2\. Пусть γ_1 и γ_2 - кривые, причём $\tilde{k}_1(s) = \tilde{k}_2(s)$ $s \in [0, L]$ Тогда $\exists$ движение плоскости $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такое, что $f(\gamma_1) = \gamma_2$

изометрия (расстояние между точками = const)

Д 1. Предположим, что такая кривая существует, тогда построим угловую ф-цию

$$v(s) = r'(s) \text{ — единичный вектор } \mathbin{\|} \tilde{n}$$

$\Rightarrow$ он выглядит так $v = \begin{pmatrix} \cos\alpha(s) \\ \sin\alpha(s) \end{pmatrix} \Rightarrow v'(s) = \begin{pmatrix} -\sin\alpha(s) \\ \cos\alpha(s) \end{pmatrix} \cdot \alpha'(s)$

$= \alpha'(s) \cdot \tilde{n}$ $\Rightarrow$ из ф. Френе $v' = \tilde{k} \cdot \tilde{n} \Rightarrow \alpha'(s) = \tilde{k}$

Пусть задана ф-ция $\tilde{k}(s)$, рассмотрим ф-цию

$$\alpha(s) = \int_0^s k(s')\,ds' + \alpha_0$$

первообраз. $\tilde{k}(s)$

Теперь по вектору скорости $v(s)$ восстановим кривую

$$r(s) = \int_0^s v(s')\,ds' + r_0$$

$v(s) = \begin{pmatrix} \cos\alpha(s) \\ \sin\alpha(s) \end{pmatrix}$ — всё есть

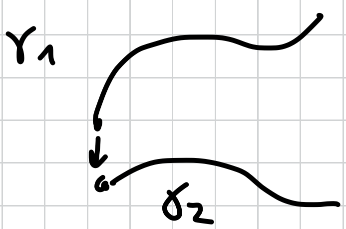
2. Теперь $\gamma: x = r(s)$ – гладк. регул. элем. кривая и $\tilde k(s)$ – ф-ция её кривизны.

Посчитаем $\tilde k(s)$

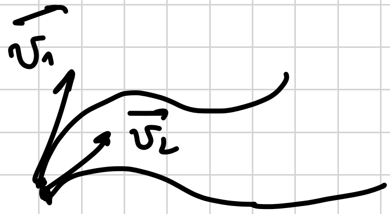
$$r'(s) = v(s) = 1 \qquad v'(s) = \alpha'(s)\cdot \tilde n$$

$$\tilde k = (v'(s), \tilde n) = (\alpha'(n)\cdot \tilde n, \tilde n) = \alpha'(n)\cdot(\tilde n, \tilde n) = \alpha'(n)$$

Пусть есть γ_1 и γ_2 $\quad x = r_1(s) \quad x = r_2(s) \quad \tilde k_1 = \tilde k_2$



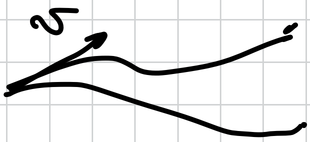
точки, где $s=0$ можно совмест. сдвигом



два единичных вектора $\vec{v_1}$ и $\vec{v_2}$ совмещаем поворотом

$\tilde k_1 = \tilde k_2 \Rightarrow \alpha_1'(0) = \alpha_2'(0)$

$\Rightarrow \alpha_1(0) = \alpha_2(0)$



$\Rightarrow$ угл ф-ции совпад, скорости вектора совп,
$\Rightarrow$ первообр $r_1 = r_2$ тоже совпадут, т.к выходят из одной точки.

Лемма Пусть $Q(s)$ и $A(s)$ – гладкие $n \times n$ симметр ф-ции, где $s \in [a, b]$. Пусть $Q' = QA$.

Тогда

① Если $Q(s)$ ортогональна, тогда $A(s)$ кососимм

② Если $A(s)$ кососимм и $\exists\, s_0 \in [a, b]$ такой, что $Q(s_0)$ ортог, тогда $Q(s)$ ортог. для $\forall s$

① $Q(s)$ – ортогон $\Rightarrow Q \cdot Q^T = E$

$A(s)$ – кососимм $\Rightarrow A = -A^T$

1. $Q \cdot Q^T = E \xrightarrow{\text{произв}} Q' \cdot Q^T + Q^{T'} \cdot Q = 0$

$Q' = Q \cdot A$

$\downarrow T$

$Q'^T = Q^T \cdot A^T$

$A \cdot Q Q^T + A^T \cdot Q \cdot Q^T = 0$

$\underbrace{A = -A^T}_{\text{доказано}}$

2. $A = -A^T \quad \exists S_0 \in [a, b] \quad Q(S_0) \cdot Q^T(S_0) = E$

$Q(S_0)(\underbrace{A + A^T}_{E}) \cdot Q^T(S_0) = 0 = const$

только это константа, и т.к где-то 0, то и везде 0

Предварительные сведения из теории диф-ых ур-ий.

t - переменная, $y(t) \in \mathbb{R}^n$ - неизв ф-ция, система обыкн. дифф. ур-ий.

$(*)$ $\begin{cases} \dot{y} = f(y, t) & \leftarrow \text{заданная правая часть} \\ y(t_0) = y_0 & \leftarrow \text{задан нач условия.} \end{cases}$

Опр Задача Коши для системы обыкн диф-ых ур-ий с правой частью f - это задача нахождения дифф-ой вектор-функции $y(t)$ такой, что выполняется $(*)$

Теорема

1) Пусть $f(y, t)$ - беск. дифф. в окр-сти т. (y_0, t_0) Тогда в некоторой окр-ти точки t_0 задача Коши имеет единств. решение, причём $y(t)$ - беск

2) Если система отн-но y линейная, т.е $f(y,t) = A(t)\cdot y$, где $A(t)$ – гладкая $m\times m$ матричная ф-ция на отрезке $t \in [a,b]$ такая, что $t_0 \in [a,b]$, тогда на $[a,b]$ $\exists!$ гладкая ф-ция $y(t)$ удовл (*) $(y(t_0) = y_0)$

диф.

Пространственные кривые. Репер Френе, кривизна и кручение.

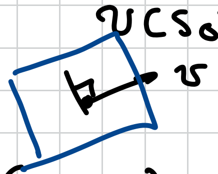
Опр Гладкая элем. пространственная кривая — мн-во точек $\gamma \subset \mathbb{R}^3$, задаваемое параметр. ур-ми $x = r(t)$, причем

1) $t \in [a, b]$ (элем.)
2) $r(t)$ беск дифф (гладкая)
3) $\dot{r}(t) \neq 0$ (регулярная)

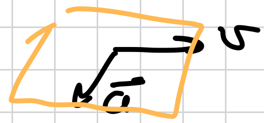
Замечание Пусть s_0 — точка кривой γ, где $r''(s_0) \neq 0$, тогда через точку $r(s_0)$ проходит две двумерные плоскости:

а) плоскость ортогональная $v(s_0)$ — нормальная пл-сть.

$$(x - r(s_0), r'(s_0)) = 0$$



б) плоскость векторов (v, r'') — соприкасающ. пл-сть.



Опр $n(s) = \dfrac{r''(s)}{|r''(s)|}$ — вектор главной нормали

Опр Вектор $b(s) = [v \times n]$ — вектор бинормали; тройка векторов (v, n, b) — репер Френе. (базис)

Теорема Пространственные ф-лы Френе

Пусть $r''(s) \neq 0$, тогда $\exists$ гладкая фун-я такая, что

1. $v' = k \cdot n$
2. $n' = -k \cdot v - \varkappa b$
3. $b' = \varkappa \cdot n$

Д

Рассмотрим матрицу $Q(s) = (v, n, b)$ - возьмем производную, получим некоторую матрицу коэф A, репер Френе в каждой точке ортонормирован,

тогда $Q' = AQ$, т.к. $(Q', Q) = 0$

$\Rightarrow$ A - кососимметрична

$$A = -A^T$$

$$\begin{pmatrix} v' \\ n' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ -a_1 & 0 & a_3 \\ -a_2 & -a_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ n \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} v' &= a_1 \cdot n + a_2 \cdot b \\ n' &= -a_1 \cdot v + a_3 \cdot b \\ b' &= -a_2 \cdot v - a_3 \cdot n \end{aligned}$$

$a_2 \cdot b = a_2 \cdot v \Rightarrow a_2 = 0$

$v' = r''$ $\quad n = \frac{r''}{|r''|}$

$k = |r''|$ $\quad v' = kn$

$a_1 = k$, пусть $a_3 = \varkappa$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & -\varkappa \\ 0 & +\varkappa & 0 \end{pmatrix}$$

$v' = kn$

$n' = -k \cdot v + \varkappa \cdot b$

$b' = \varkappa \cdot n$

$b' \cdot n = \varkappa \cdot n^2$

$b = [v \times n]$

$\varkappa(s)$ гладкая?

умножим на n

$(b'; n) = \varkappa$ — тоже беск. диф.

в окр. т. s_0 — b' - беск диф, n беск диф.

Опр $\varkappa(s)$ - кручение кривой

Утв Пусть $r''(s) \neq 0$, тогда $\forall s \in [a, b]$

$(\varkappa = 0) \longleftrightarrow (\gamma$ - плоская кривая$)$

Д $\boxed{\Rightarrow}$ $b' = \varkappa \cdot n \Rightarrow b' = 0 \Rightarrow b = const$

$(v, b_0) = 0 \Rightarrow (r', b_0) = 0 = \frac{d}{ds}(r, b_0)$

$\frac{d}{ds}(r, b_0) = (r', b_0) + (r, \underset{0}{b_0'}) = (r', b_0)$

$\Rightarrow (r, b_0) = const \Rightarrow$ плоская кривая

($\Leftarrow$) γ - плоская кривая $\Rightarrow r'$ и r'' лежат в одной плоскости $\Rightarrow r \parallel k \perp r', r'' \Rightarrow b \perp \vec{r}$

$b = [n \times v] \parallel r', r'' \Rightarrow b = const$

$\Rightarrow b' = 0 \Rightarrow b' \cdot n = \varkappa = 0$

Ут6 Кручение и репер Френе существ. только в точках, где $r''(s_0) \neq 0$ - для бирегулярных кривых (кривизна не обращается в ноль)

Теорема О еже

На сфере не существует гладкого единичного поля (такое поле хотя бы в одной точке обращается в ноль)

Опр γ - бирегулярная, если вектор r'' нигде не обращается в нуль

Задача Док-ть, что $\exists!\, w(s)$ такой, что:

$v' = [w, v] \quad n' = [w, n] \quad b' = [w, b]$ (вектор Дарбу)

$$\text{Френе} \begin{cases} v' = k \cdot n = [\omega, v] \\ n' = k \cdot b - \varkappa \cdot v = [\omega, n] \\ b' = \varkappa \cdot n = [\omega, b] \end{cases}$$

Предположим, что $\omega = a_1 v + a_2 \cdot n + a_3 \cdot b$

$[\omega, v] = [a_1 v + a_2 \cdot n + a_3 \cdot b, v] = a_1 \underset{0\ \sin=0}{\cancel{[v, v]}} + a_2 \underset{b}{[n, v]} + a_3 \underset{n}{[b, v]} = k \cdot n$

$a_2 = 0 \qquad a_3 = k$

$$[\omega, n] = a_1 [\overset{b}{v, n}] + a_2 \cancel{[n, n]}_{0} + a_3 [\overset{v}{b, n}] = k \cdot v - æ \cdot b$$

$$[\omega, b] = a_1 [\overset{n}{v, b}] + a_2 \cancel{[n, b]}_{0} + a_3 \cancel{[b, b]}_{0} = æ \cdot n$$

$$\boxed{W = \begin{pmatrix} æ \\ 0 \\ k \end{pmatrix}}$$

$a_1 = æ$

Теорема Вычислительные ф-лы в произвольной параметризации.

Натуральная

$$v = \dot r$$

$$n = \frac{\ddot r}{|\ddot r|}$$

$$b = [v, n]$$

$$k = |\ddot r|$$

$$æ = - \frac{\langle \dot r, \ddot r, \dddot r \rangle}{|\ddot r|^2}$$

Произвол:

$$v = \frac{r'}{|r'|}$$

$$n = \frac{r''}{|r''|}$$

$$b = [v, n]$$

$$k = \frac{[r' \times r'']}{|r'|^3}$$

$$æ = + \frac{\langle r', r'', r''' \rangle}{|[r' \times r'']|^2}$$

Д. Условимся, что $'$ — по t, $\bullet$ — по s

Для нат все, кроме кручения из опр.

$$n' = -k \cdot v - æ \cdot b \quad \Big| \cdot b \text{ скалярно}$$

$$b' = n \cdot æ \qquad æ = (b', n)$$

$$(n', b) = -k \cdot \underbrace{\cancel{(v, b)}}_{0} - æ \underbrace{(b, b)}_{|b|^2 = 1^2}$$

$$\Rightarrow æ = -(n', b)$$

$$b = [v \times n]$$

$$n = \frac{r''}{|r''|} = \frac{r''}{k} \qquad n' = \frac{r''' \cdot k - k' \cdot r''}{k^2}$$

$$æ = -\left(\frac{r'''}{k} - r'' \cdot \frac{k'}{k^2} ; v \times \frac{r''}{k} \right) = -\left(\frac{r'''}{k}, v \times \frac{r''}{k} \right)$$

$$\left(\frac{1}{k}\right)' \qquad \left(\frac{1}{k}\right)$$

$$= -\frac{1}{k^2} (r''', [r' \times r''])$$

Теперь перейдём в произвольную параметризацию

$$x = r(t) \Rightarrow x = r(t(s)) \qquad |r'| = \frac{ds}{dt} \text{ - по опр}$$

$$r' = \frac{dr}{dt}\cdot\frac{ds}{dt} = \dot r \cdot |r'|$$

$$r'' = \frac{\partial r'}{\partial t} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\cdot\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2r}{dt^2}\cdot\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d^2s}{dt^2}\cdot\frac{dr}{dt} = \ddot r\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \dot r\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)$$

$\dot r \perp \ddot r$

$$\Rightarrow [r' \times r''] = \left[\dot r \cdot \frac{ds}{dt},\ \ddot r\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \dot r\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)\right] = \dot r \cdot \ddot r \cdot \left(\frac{ds}{dt}\right)^3$$

$\dot r = \frac{r'}{|r'|}$, $\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 = |r'|^3$

$\dot r \parallel \dot r \Rightarrow 0$

$$[r' \times r''] = r' \cdot |r'|^2 \cdot \ddot r$$

$$|[r' \times r'']| = |r'|^3 \cdot |\ddot r| = k \cdot |r'|^3$$

Перейдём к вычислению кручения из Френе:

$$\varkappa = -(\dot n, b) = -\langle \dot n, v, n\rangle$$

$$\dot n = \left(\frac{\ddot r}{k}\right)^{\cdot} = \frac{\dddot r}{k} + \ddot r\,\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{k}\right) \qquad n = \frac{\ddot r}{k}$$

$$v = \frac{dr}{ds} = \dot r$$

$$\varkappa = -\left\langle \frac{\dddot r}{k} + \ddot r\,\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{k}\right),\ \dot r,\ n\right\rangle = -\frac{1}{k^2}\langle \dddot r, \dot r, \ddot r\rangle$$

$$r''' = \dddot r\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 + 3\ddot r\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\cdot\frac{d^2s}{dt^2} + \dot r\,\frac{d^3s}{dt^3}$$

$$\langle r', r'', r'''\rangle = ([r', r''], r''') = \langle \dot r, \ddot r, \dddot r\rangle\left(\frac{ds}{dt}\right)^6 = \langle \dot r, \ddot r, \dddot r\rangle |r'|^6$$

$$k = \frac{|r'|^3}{|[r' \times r'']|} \Rightarrow \varkappa = -\frac{\langle r', r'', r'''\rangle}{|[r' \times r'']|^2}$$

Поверхности. Первая квадратичная форма. Длины и углы.

Опр Гладкая n-мерная регулярная элем. пов-сть в $\mathbb{R}^n$ – это мн-ство $M \subset \mathbb{R}^n$, задаваемое параметрическими ур-ми: $x = r(u)$, где

$u = (u_1, \dots, u_n)$ $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad r(u) = \begin{pmatrix} x_1(u) \\ \vdots \\ x_n(u) \end{pmatrix}$, причем

1) $u \in D \subset \mathbb{R}^n$ – область (открытое связное мн-во) (элемент)
2) $r(u)$ – беск. дифф в D (гладкость)
3) $\frac{\partial r}{\partial u_1} \dots \frac{\partial r}{\partial u_n}$ – лин незав. $\forall u \in D$ (регулярность)
4) $r(u) = r(u^*) \longleftrightarrow u = u^*$

Опр Гладкая кривая на пов-сти M – гладкое отображение отрезка $t \in [a, b]$ в M, т.е соответствие, сопоставляющее каждой точке $t \in [a, b]$ точку $u(t)$ на пов-сти M, причем $u(t)$ – беск дифф

Замечание $u_i = u_i(t)$ $\quad i = \overline{1, n}$ (не требует регулярности)

Опр Касательный вектор к M в т. P – вектор скорости гладкой кривой, лежащий на пов-сти M и проходящий через P

Утв. Мн-во касательных векторов к M в т. P – n-мерное векторное пр-ство, базис в нем $r_1(P) \dots r_n(P)$

Д $\boxed{\Rightarrow}$ Рассмотрим $\gamma \in M$ $\quad \gamma(t_0) = P$ и посчитаем вектор скорости

$$\dot{\gamma} = \dot{r}(t_0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial u_j}(P) \frac{\partial u_j}{\partial t}(t_0) = \sum_{j=1}^{n} r_j(P)\, \dot{u}_j(t_0) \quad (*)$$

теорема о сложной ф-ции

$\Rightarrow$ любой нас вектор - лин. комбинация r_j

$\Leftarrow$ $P: r(u^0)$ $u^0 = (u_1^0, \ldots, u_n^0)$ - зададим точку

Рассмотрим вектор ξ такой, что $\xi = \sum_{j=1}^{n} \xi_j r_j(u^0)$

Нужно найти кривую, для к-ой ξ - вектор скорости

$\gamma: u_j = u_j^0 + \xi_j t$, если мы подставим это в парам-е ур-е пов-ти $r(u(t))$ и посчитаем производную $\Rightarrow$ видно из (*), что

$$\dot{\xi}_j = \dot{u}_j$$

Замечание

1) Зафикс. все координаты на пов-сти M, кроме одной, меняя эту оставшуюся. Получим кривую

$$\gamma_j: \begin{cases} u_i = u_i^0 & i \neq j \text{ (остались как были)} \\ u_j = u_j^0 + t & - j\text{-коорд. линия} \end{cases}$$

2) $u_i = u_i(t)$ $(\dot{u}_1, \ldots, \dot{u}_n)$ - вектор скорости

3) $u_i = u_i(v_1, \ldots, v_n)$ - замена параметризации

$\frac{\partial u_i}{\partial v_j}$ - матрица якоби невырождена

Опр Мн-во векторов скоростей кривых лежащих на M и проходящих через т. P наз. касательной пл-тью к M в этой точке $T_P M$

Векторы из этой пл-ти наз касательными

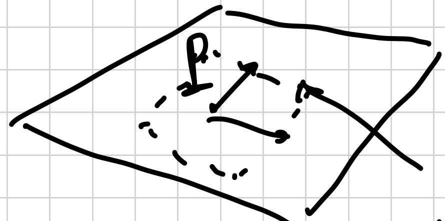
Опр Первая (квадратич.) фундам. форма пов-ти M - соответств.

сопоставляющее каждой т. $P \in M$ симметричную положительно определенную билинейную форму в кас. плоскости T_pM – скалярное пр-е кас. векторов

Замечание

$x = r(u)$ в каждой точке u, есть базис $r_1, \dots, r_n$

$g_{ij} = (r_i, r_j)$ – матрица $n \times n$ скалярного пр-я в кас-й плоскости



задано скалярное пр-е

1) $\xi = \sum_{j=1}^{n} \xi_j r_j \qquad \eta = \sum_{i=1}^{n} \eta_i r_i$

* Далее без знака сумм (опустим его)

$$(\xi, \eta) = \underbrace{g_{ij}}_{\text{матрица скалярных}} \underbrace{r_i r_j}_{\text{базис}}$$

2) $|\xi| = \sqrt{(\xi, \xi)} = \sqrt{g_{ij} \xi_i \xi_i}$

3) $\cos\varphi = \dfrac{(\xi, \eta)}{|\xi||\eta|}$

4) Длина кривых на пов-ти M

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\dot\gamma| dt = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(u(t))\, \dot u_i \cdot \dot u_j}\, dt$$

5) Угол между кривыми – угол между кас-ми векторами к этим кривым

Опр Ковариантное ускорение кривой $\gamma \subset M$ $\left(\nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma = \Pi(\ddot\gamma)\right)$, где Π – ортогонал. проекция на T_pM.

Опр γ наз геодезической, если во всех точках $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$

(ускорение перпендикулярно, параллельный перенос кас. вектора вдоль пов-сти)

Ковариантное дифф векторных полей

Опр Гладкое векторное поле на M – соответствие, ставящее каждой точке $P \in T_pM$ вектор $\xi(P)$, причем он должен гладко зависеть от P, т.е

$$\underbrace{\xi}_{\text{вектор}} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\xi^i(u)}_{\text{коэф}} \cdot \underbrace{r^i}_{\frac{\partial r}{\partial u_i}}, \text{ где } \xi_i \text{ – беск дифф.}$$

Опр Ковариантная пр-я поля ξ по u_i

$$\nabla_i \xi = \Pi\left(\frac{\partial \xi}{\partial u_i}\right)$$

Опр Ковариантная пр-я поля ξ в т. P вдоль $\underset{\text{прямые}}{\eta}$

$\eta = \eta_i \partial_i$ – разложим по базису T_pM

$$\nabla_\eta \xi = \nabla_{\eta_i \partial_i} \xi = \eta_i \nabla_i \xi$$

$\Downarrow$

линейность ∇

, где ξ – векторное поле

$\eta \in T_pM$

Опр Пр-я f вдоль $\eta = \eta_i r_i(\underline{P})$

$$\partial\eta(f) = \eta^i \frac{\partial f}{\partial u^i}(\underline{P})$$

Задача Доказать, что $\partial\eta(f)$ не зависит от выбора $(u_1, \dots, u_n)$

Замена базиса $v^i = v^i(u_1, \dots, u_n)$, тогда

$u^j = u^j(v_1, \dots, v_n)$

$$\frac{\partial f}{\partial u^j} = \frac{\partial v^i}{\partial u^j} \cdot \frac{\partial f}{\partial v^i} \qquad \frac{\partial f}{\partial v^i} = \frac{\partial u^j}{\partial v^i} \cdot \frac{\partial f}{\partial u^j}$$

Тогда $\eta^i \longrightarrow \tilde{\eta}^j$ преобразование координат.

$$\boxed{\tilde{\eta}^j = \eta^i \frac{\partial u_j}{\partial v^i}}$$, тогда

$$\partial_{\tilde{\eta}}(f) = \tilde{\eta}^j \frac{\partial f}{\partial u_j} = \eta^i \frac{\partial u_j}{\partial v_i} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial f}{\partial v^i} = \eta^i \frac{\partial f}{\partial v^i}$$

св-ва ковариантной пр-ой:

1) $\nabla_\eta (c\xi + \tilde{c}\tilde{\xi}) = c\nabla_\eta \xi + \tilde{c}\nabla_\eta \tilde{\xi}$ дистрибутивно

2) $\nabla_{c\eta + \tilde{c}\tilde{\eta}} \xi = c\nabla_\eta \xi + \tilde{c}\nabla_{\tilde{\eta}} \xi$

3) Пусть f - гладкая ф-я на M

$f: M \to \mathbb{R}$ $\quad f(u_1, \dots, u_n)$ (ξ - кас. вектор)

Тогда $\nabla_\eta (f\xi) = f(P)\nabla_\eta \xi + \xi(P)\partial_\eta f$

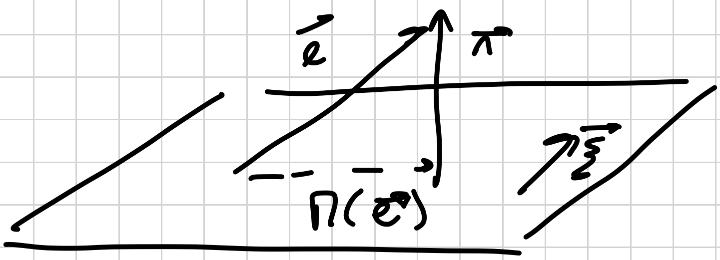
$\mathcal{D}$ $\quad \nabla_\eta (f\xi) = \eta \nabla_i (f\xi) = \eta_i \Pi\left(\frac{\partial(f\xi)}{\partial u^i}\right) =$

$\eta_i \Pi\left(\frac{\partial f}{\partial u_i}\xi + \frac{\partial \xi}{\partial u_i} f\right) \textcircled{=}$

$$\textcircled{=} \underbrace{\eta_i \Pi\left(\frac{\partial f}{\partial u^i}\right)\xi + \eta_i \Pi\left(\frac{\partial \xi}{\partial u^i}\right) f}_{\partial_\eta(f)} + \underbrace{\eta_i \Pi\left(\frac{\partial \xi}{\partial u^i}\right) f}_{\nabla_\eta \xi}$$

4) $\partial_\eta(\xi, \tilde{\xi}) = (\nabla_\eta \xi, \tilde{\xi}) + (\xi, \nabla_\eta \tilde{\xi})$

$\mathcal{D}$ $\quad (\nabla_\eta \xi, \tilde{\xi}) + (\xi, \nabla_\eta \tilde{\xi}) = \eta^i \left(\left(\Pi\left(\frac{\partial \xi}{\partial u^i}\right), \tilde{\xi}\right) + \left(\xi, \Pi\left(\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial u^i}\right)\right)\right.$



$\Pi(e) = \vec{e} + \vec{n}$

$\Pi(e) - \vec{e} = \vec{n}$

Если в касат. плоскости ξ, то

$(\vec{n}, \vec{\xi}) = 0 \qquad (\Pi(\vec{e}), \vec{\xi}) = (\vec{e}, \vec{\xi})$

$\Rightarrow \quad (\Pi(\vec{e}) - \vec{e}, \vec{\xi}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Pi(\ldots)$ можно опустить.

Как считать ковариантные пр-е?

Представим векторное поле как линейную комбинацию базисных векторов $r_j(u)$

$$\xi = \xi_j(u)\, r_j(u)$$

$$\nabla_i \xi = \Pi\left(\frac{\partial \xi_j}{\partial u^i} r_j + \xi_j \frac{\partial r_j}{\partial u^i}\right) = \frac{\partial \xi_j}{\partial u^i} r_j + \xi_j \Pi\left(\frac{\partial r_j}{\partial u^i}\right)$$

$$r_j = \frac{\partial r}{\partial u^j} \qquad \frac{\partial \xi_j}{\partial u_i} r_j + \xi_j \Pi\left(\frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j}\right)$$

$$r_{ij} = \frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j}$$

Опр $\Pi(r_{ij}) = \Gamma_{ij}^{k}(u)\, r_k$ $\quad \Gamma_{ij}^k$ - символы Кристофеля 2-го рода

Опр $(\Pi(r_{ij}), r_m) = \Gamma_{ij}^{k}(r_k, r_m) = \Gamma_{ij,m}$

$\Gamma_{ij,m}$ - символы Кристофеля 1-го рода

Теорема Ф-ла для символов Кристофеля

$$\boxed{\begin{aligned}\Gamma_{ij,m} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{im}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_m}\right)\\ \Gamma_{ij}^{k} &= \frac{1}{2} g^{km}\left(\frac{\partial g_{im}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_m}\right)\end{aligned}}$$

g^{km} – обратные компоненты g_{ij}

Д коэф-ты первой кв. формы $\quad g_{ij} = (r_i, r_j)$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} = \left(\frac{\partial r_i}{\partial u^m}, r_j\right) + \left(r_i, \frac{\partial r_j}{\partial u^m}\right) = (r_{im}, r_j) + (r_i, r_{jm})$$

$$= \Gamma_{im}^{j} + \Gamma_{jm}^{i} \quad (1)$$ $i, j, m = \overline{1, n}$ — индексы, поэтому можем заменить

$i \to j$

$m \to i$

$j \to m$

Получим $\frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} = \Gamma_{ji}^{m} + \Gamma_{mi}^{j} \quad (2)$

Повторим ещё раз $\frac{\partial g_{mi}}{\partial u^j} = \Gamma_{mj}^{i} + \Gamma_{ij}^{m} \quad (3)$

(2) + (3) − (1) (символы Кристоффеля симметричны)

$$\frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} = 2\Gamma_{ij}^{m}$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma_{ij,m} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m}\right)$$

Умножим её на g^{km} (обратная к g_{km})

$$\Gamma_{ij,\cancel{m}} \cdot g^{k\cancel{m}} = \Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{km}\left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m}\right)$$

Ковариантная пр-я

$$\boxed{\nabla_\eta \xi = \eta_j \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial u_j} + \Gamma_{ij}^{k} \cdot \xi^j\right) r_k}$$

Д

$$\nabla_\eta \xi = \eta_j \cdot \nabla_i \xi = \eta_j \cdot \Pi\left(\frac{\partial \xi_j}{\partial u^i} r_j + \xi_j \overbrace{\frac{\partial r_j}{\partial u_i}}^{r_{ji}}\right)$$

$$\Pi(r_{ij}) = \Gamma_{ij}^{k}(u) \cdot r_k$$

$$= \eta_i\, \Pi\left(\frac{\partial \xi_j}{\partial u^i} r_j\right) + \eta_i \cdot \xi_j\, \Pi(r_{ji})$$

$$\frac{\partial \xi_j}{\partial u^i} \cdot r_j \qquad\qquad \Gamma_{ij}^{k}(u) \cdot r_k$$

$$= \eta_i \left(\frac{\partial \xi_j}{\partial u^i} r_j + \Gamma_{ij}^{k}(u) \cdot \xi^j \cdot r_k\right)$$

заменим j на k (индекс все равно)

$$= \eta_i r_k \left(\frac{\partial \xi_k}{\partial u_i} + \Gamma_{ij}^{k}(u) \cdot \xi^j\right)$$

$$\boxed{\nabla_j \xi = \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial u^j} + \Gamma_{ij}^{k} \xi^j\right) v_k}$$

$$\nabla_\eta \xi = \eta^i \cdot \nabla_j \xi$$

$$\nabla_j \xi = \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial u^j} + \Gamma_{ij}^{k} \xi^j\right) \cdot v_k$$

Параллельный перенос и геодезические на пов-х. Изометрии пов-стей

Опр Гладкое семейство касательных векторов к M в точках кривой $\gamma(t)$ — соответствие, сопоставляющее каждой точке t вектор $\xi(t) \in T_{\gamma(t)} M$, гладко зависящий от t

$$\underbrace{r_1(u(t))}_{\text{пр-во}} , \dots , r_n(u(t))$$

к кривой

$$\xi(t) = \xi_i\, r_i(u(t))$$

Опр Ковариантная пр-я гладкого семейства $\xi(t)$ вдоль γ: $\nabla_{\dot\gamma} = \Pi(\dot\xi)$

Семейство-во наз. параллельным вдоль γ, если $\nabla_{\dot\gamma} \xi = 0$. В явном виде $\nabla_{\dot\gamma}\xi = \Pi\left(\dot\xi_i r_i + \xi_i \frac{\partial r_i}{\partial u_j} \dot u_j\right)$

$$= \dot\xi_i r_i + \xi_k \dot u_j\, \Pi(r_{jk}) = (\dot\xi_i + \Gamma^i_{jk} \xi_k \dot u_j)\, r_i$$

$$\Gamma^i_{jk} r_i$$

Следствие $\begin{pmatrix} \xi(t) \text{ параллельно} \\ \text{вдоль } \gamma \end{pmatrix} \to \left(\dot\xi_i + \Gamma^i_{jk} \dot u_j \xi_k = 0\right)$

система дифф ур-ий, где $i = 1, \dots, n$

Опр Пусть $\xi^0 \in T_{\gamma(a)} M$, где $\gamma : [a, b] \to M$ гладкая, тогда $\exists!$ гладкое семейство $\xi(t)$, причем:

1) ξ параллельно γ

2) $\xi_i(a) = \xi_i^0$ — результат параллельного переноса ξ^0

Теорема св-ва параллельного переноса

1) $\forall \gamma\ \forall \xi$ результат параллельного переноса существует и он единственен

$\nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma$ - геодез.

$\mathcal{D}$ $\begin{cases} \nabla_{\dot\gamma} \xi = 0 \\ \xi(a) = \dot\xi \end{cases}$ под суммой стоят беск дифф-е ф-ции тогда в некоторой окр-ти точки ξ^0 $\exists!$ решение по теореме Коши

2) Если $\xi(t)$ и $\eta(t)$ параллельны вдоль $\gamma(t)$, то $(\xi(t), \eta(t)) = const$

$\mathcal{D}$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\xi(t), \eta(t)) = (\dot\xi, \eta) + (\xi, \dot\eta) = (\Pi(\dot\xi), \eta) + (\xi, \Pi(\dot\eta))$$

$$= (\underbrace{\nabla_{\dot\gamma}\xi}_{=0}, \eta) + (\xi, \underbrace{\nabla_{\dot\gamma}\eta}_{=0}) = 0 \Rightarrow (\xi(t), \eta(t)) = const$$

3) Парраллельный перенос сохраняет длины и углы

$\mathcal{D}$ Рассмотрим $|\xi| = (\xi, \xi)$

$$\frac{d}{dt}(\xi, \xi) = (\underbrace{\nabla_{\dot\gamma}\xi}_{=0}, \xi) + (\xi, \underbrace{\nabla_{\dot\gamma}\xi}_{=0}) = 0$$

$$\Rightarrow |\xi| = const$$

$$\cos\theta = \frac{(\xi, \eta)}{|\xi|\,|\eta|} = const$$

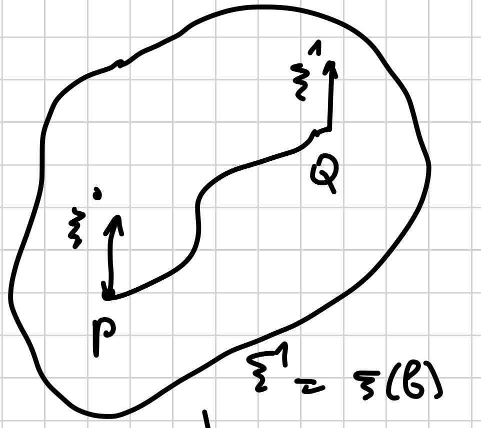
4) Результат параллельного переноса линейно зависит от ξ^0

$\mathcal{D}$ Система ур-й линейна по ξ: сумма двух векторных полей равна векторному полю, если ξ^0 умножить на скаляр, то результат тоже умножается на него.

Замечание ξ^1 зависит от γ $\to$ (перенос ξ^0 по поверхности) $u(t)$ будут другими функ-ями, так что символы Кристоффеля 2-го рода поменяются

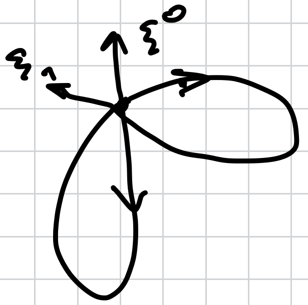
Отображение $P_\gamma : T_P M \to T_Q M$

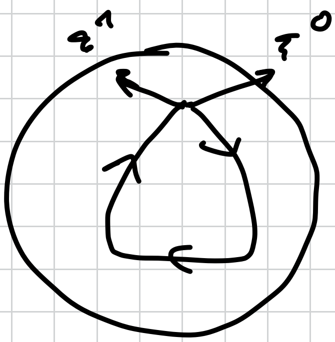
Если рассмотрим петлю, то
$P: T_P M \to T_Q M$
и если будем брать несколько петель, то получим мн-во таких операторов P_γ



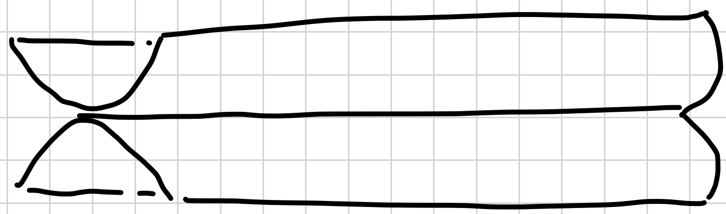
Спопил ;) по замкнутой!

Опр P_γ - оператор голономии, соответ. петле γ





* Мера, насколько искривлена отн. плоскости
* При параллельном переносе по замкн. кривой, вообще говоря, мы получим разные вектора в т. P (если P = Q)
  $\Rightarrow$ получили отобр. P_γ



Замечание

Пусть пов-ти M и N касаются вдоль γ, т.е. $T_{\gamma(t)} M = T_{\gamma(t)} N$ и $\dim M = \dim N$, тогда

($\xi(t)$ пар-но вдоль γ на M) $\longleftrightarrow$ ($\xi(t)$ пар-но вдоль γ на N)

Напоминание

γ - геодезическая, если $\nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma = 0$ $\Pi(\ddot\gamma) = 0$, т.е. семейство векторов считается параллельно вдоль γ.

Опр $\boxed{\nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma = 0}$ или $\boxed{\ddot u_i + \Gamma_{ik}^{j} (u(t)) \dot u_i \dot u_k = 0}$ — ур-е геодезической

Следствие

1) Через каждую точку пов-ти M в направлении кас. вектора проходит ровно одна геодезическая (из т. Коши)

2) Если $\gamma(t)$ – геодезическая, то $|\dot\gamma| = const$ ($т.к.\ \Pi(\ddot\gamma)=0$)

3) При параллельном переносе вдоль геодезической сохраняются углы между векторами и геодезической

Изометрия пов-тей

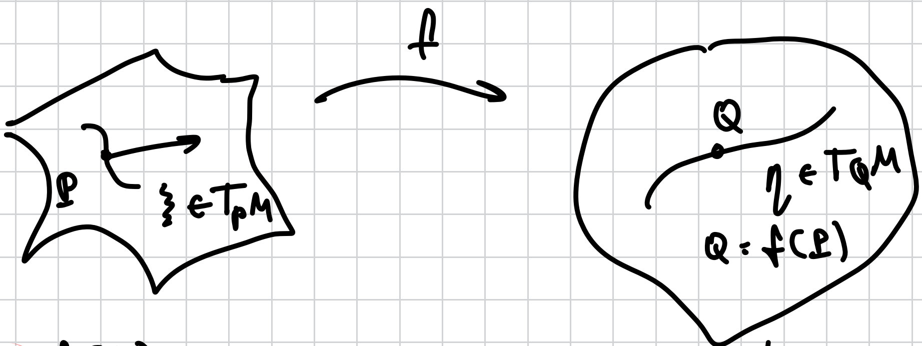
$M^m \subset \mathbb{R}^{k_1}$ $\quad N^n \subset \mathbb{R}^{k_2}$ $\quad M: x = r(u) \quad u = (u_1, \dots u_m)$

$N: y = r(v) \quad v = (v_1, \dots, v_n)$

Пусть имеется отображение $f: M \to N \Rightarrow v_i = f_i(u_1, \dots, u_m)$

Опр Отображение f – гладкое, если $f_i(u)$ – беск. дифф-мы. Пусть γ – кривая на M такая, что $\dot\gamma(t_0) = \xi$

Рассмотрим $f(\gamma)$ – кривая на N, тогда $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} f(\gamma)$



Утв 1) $f(\gamma)$ – гладкая кривая на N, проход. через т. Q

2) $\eta = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} f(\gamma)$ не зависит от выбора γ и соответствие $\xi \to \eta$ линейное отобр касат. плоскостей

Д Кривые заданы след. образом

$\gamma: \quad u_j = u_j(t)$ $\qquad f(\gamma): v_i = f_i(u(t))$

$\dot u_j(t_0) = \xi_j$

Тогда координаты вектора η: $\eta_i = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} f_i(u(t)) \ominus$

$\Rightarrow$ $\frac{\partial f_i}{\partial u^j}(P)\,\xi_j$ — от выбора кривой правая часть не зависит $\Rightarrow$ левая часть тоже

Опр $d_p f : T_p M \to T_Q N$ — дифф-ал в т. P, причем $\frac{\partial f_i}{\partial u^j}(P)$ — матрица отображения (Якоби) нас-х ил-тей

Опр Отображение $f: M \to N$ — изометрия, если
1) f — биекция
2) $\forall P \in M \quad \forall \xi, \eta \in T_p M : (\xi, \eta) = (d_p f(\xi), d_p f(\eta))$

Св-ва
1) При изометрии сохраняются длины и углы
2) При изометрии параллельное семейство переходит в параллельное
3) Геодезические переходит в геодезические
4) M и N изометричны, если $\exists$ изометрия $f: M \to N$

Опр $f: M \to N$ локальная изометрия, если $\forall P \in M$ $\exists$ окр-ть и точка P на M такая, что $f|_U$ — изометрия U на $f(U)$ (не требует взаимной одн-ти) $\to$ намотка нити

Задача Док-ть, что бесконечный цилиндр и беск. конус лок-но изометричны пл-ти

1) параметризация цилиндра $Cl^2 = r(u,v) = (R\cos v, R\sin v, u)$
плоскость $\mathbb{R}^2 = r(x,y) = (x, y, 0)$

$\frac{\partial r}{\partial v} = (-R\sin v, R\cos v, 0)$ $\qquad$ $\frac{\partial r}{\partial x} = (1, 0, 0)$

$\frac{\partial r}{\partial u} = (0, 0, 1)$ $\qquad$ $\frac{\partial r}{\partial y} = (0, 1, 0)$

$$G_{Cl^2} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad G_{\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$d s^2_{cyl} = R^2 du^2 + dv^2 \qquad d s^2_{\mathbb{R}^2} = dx^2 + dy^2$

$\begin{cases} x = R\cdot u + c \\ v = y + c \end{cases}$) замена координат

$(dx)^2 = R^2 du^2$

$(dv)^2 = (dy)^2$

поскольку $v \in [0, 2\pi)$

изометрия локал

2) конус $r(u,v) = (vR\cos u,\ v\cdot R\cdot \sin u,\ cv)$

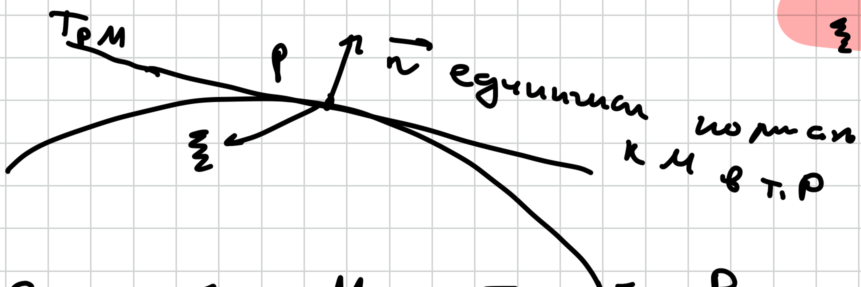
$ds^2_{конус} = v^2R^2du^2 + (R^2 + c^2)dv^2$

$x = vR + c$

$y = \dfrac{(R+c)^{3/2}}{3/2} + c$ — аналогично

Вторая квадр форма пов-ти. Теорема Менье.

Опр n-мерная пов-ть в $\mathbb{R}^N$ — гиперповерхность, если $N = n+1$



Если есть вектор $\xi \in T_pM \Rightarrow$ его норм сечение в напр ξ

гиперповерхность M с точкой P.

Рассмотрим целое семейство кривых, полностью покрывающих окр-ть т. P

Опр Нормальное сечение пов-ти M в т. P — пересечение M с 2-плоскостью, проходящей через вектор $\vec{n}(P)$

Задача Д-ть, что в ок-ти т. P норм. сечение — гладкая кривая в M.

Пусть пов-сть задана неявно

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_N) \\ \vdots \\ \varphi_k(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_N) \\ \alpha_1 = x_{k+1} \\ \vdots \\ \alpha_m = x_N \end{cases} \qquad m = N - k$$

остальные k координат выражаются, как гладкие ф-ции от $x_1, \dots, x_N$

причем $k=1$, т.к это гиперповерхность

Должно выполняться условие регулярности:

$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_N}\right)$ — ранг матрицы Якоби равен k, T_pM — ядро матрицы

Плоскость нормального сечения

$$r(t,u) = P + t\xi + u \cdot n \qquad r(0,0) = P$$

Мн-во точек норм сечения удовл условиям:

$$\begin{cases} \varphi(r(t,u)) \\ r(t,u) = P + t\xi + u n \end{cases}$$

$\gamma: r(u(t)) \Rightarrow$ по т. о неявной ф-ции $\frac{\partial \varphi}{\partial u} \neq 0$

$\Rightarrow$ ур-е можно разрешить отн-но $u(t)$ в окр-ти т. $P(0,0)$

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right|_{(0,0)} = \nabla\varphi(P)\,\frac{\partial r}{\partial u} = \nabla\varphi(P)\cdot n \neq 0$$

$$\frac{\nabla\varphi(P)}{\|\nabla\varphi(P)\|}$$

Опр $\tilde{k}(\xi)$ – кривизна норм сечения в направлении n со знаком ("+" если вектор ускорения туда же, что и $\vec{n}$; "–" наоборот)

$\tilde{k}(\xi) = \pm\ddot{\gamma}$

$\uparrow \vec{n}$ $\uparrow\ddot{\gamma}$

Утв Фун-е $b(\xi) = |\xi|^2 k(\xi)$ – квадратичная форма на кас-й пл-ти к M

Д Достаточно показать, что $|\xi| = 1$, т.к тогда этот вектор – вектор скорости в натур. параметризации.

Пусть в т. P $s=0$ и $u = u(s)$ – ур-е норм. сечения на пов-ти

Тогда $\xi^i = \dot{u}^i(0)$

Ур-е норм. сечения в объемлющем пр-ве $r = r(u(s))$

$\tilde{k} = (n, \ddot{r}(0))$ $\quad r_i = \frac{\partial r}{\partial u_i}$ $\quad r_{ij} = \frac{\partial^2 r}{\partial u_i \partial u_j}$

$$\ddot{r}(0) = \frac{d}{ds}\left. r_i \dot{u}^i \right|_{s=0} = r_{ij}(P)\,\dot{u}^i(0)\cdot\dot{u}^j(0) + r_j(P)\cdot\ddot{u}^i(0)$$

$n \parallel r_i$

$(n, r_i) = 0$ $\quad$ $|\cdot n$ скалярно

$$\tilde{k} = (n, r_{ij}(P)\cdot\dot{u}^i(0)\,\dot{u}^j(0)) = \underbrace{(n, r_{ij}(P))}_{b_{ij}}\,\xi^i\xi^j$$

Причем b_{ij} не зависит от ξ (норм сечения)

* потом делим $b(\xi)$ на $g(\xi)$, чтоб нормировать

Опр $b(\xi) = \tilde{k}(\xi)\,|\xi|^2$ — **Вторая фунд квадр форма**

$\Rightarrow$ матрица $2^{\text{й}}$ квадр. формы

$(u_1, \dots, u_n) \in M \to (r_1, \dots, r_n) \in T_pM$

$$\boxed{b_{ij} = (r_{ij}, n)}$$

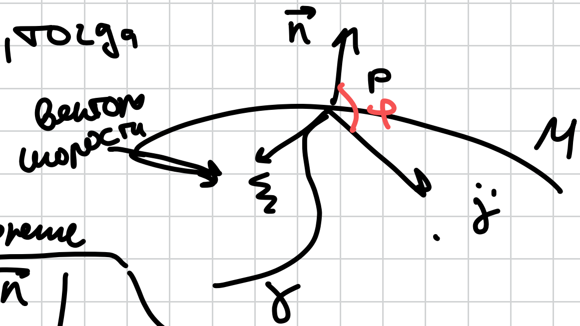
Замечание

$$\boxed{\tilde{k}(\xi) = \frac{b(\xi)}{|\xi|^2} = \frac{b(\xi)}{g(\xi)} = \frac{\xi^T B \xi}{\xi^T G \xi}}$$

Теорема **Менье**

Пусть k - кривизна γ в т. P, тогда

$$k \cos\varphi = \tilde{k}(\xi) = \frac{b(\xi)}{g(\xi)}$$

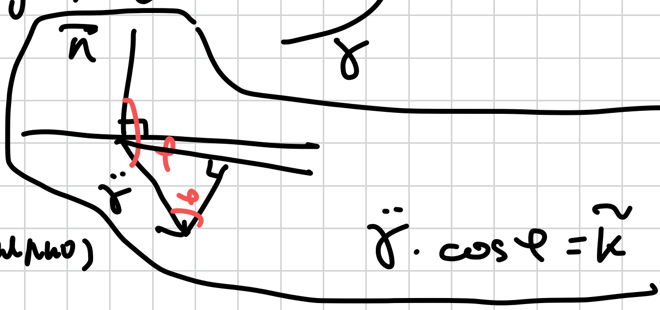


Рассмотрим γ и посчитаем её ускорение

$\gamma : x = \gamma(t) = r(u(t))$

$$\ddot\gamma = \frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j}\dot u^i \dot u^j + \frac{\partial r}{\partial u^j}\ddot u^j \,\Big|\cdot n$$

(скалярно)



$\tilde{k}$

$(n, \ddot\gamma) = (n, r_{ij}\dot u^i \dot u^j)$

$$\underset{1}{\underset{\|}{|n|}} \cdot \underset{k}{\underset{\|}{|\ddot\gamma|}} \cdot \cos\varphi = (n, r_{ij})\,\xi^i \xi^j$$

делим на $g(\xi)$, чтобы нормировать

$$k \cdot \cos\varphi = b_{ij} \cdot \xi^i \cdot \xi^j = \frac{b(\xi)}{g(\xi)}$$

Напоминание из линейной алгебры

Пусть V - евклидово пр-во, B — квадр. форма (симметр)

Тогда по теореме в V $\exists$ орто нормированный базис такой, что форма B диаг, т.е.

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \lambda_j \text{ — собств значения } B$$

т.е в каждой т. T_pM $\exists$ ортонормированная базис такой, что G - единичная, B - диагональная

Опр λ_i – наз. главными кривизнами пов-ти в т. P, а прямые, проходящие через векторы ортонорм. базиса по λ, главными направлениями.

Замечание M $x = r(u)$ $r_1, \dots, r_m$ $r_i = \frac{\partial r}{\partial u^i}$

$g_{ij} = (r_i, r_j)$ – G

$b_{ij} = (r_{ij}, n)$ – B $\swarrow E$, т.к. $r_1 \dots r_m$ онб

главные кривизны $\det(B - \lambda G) = 0$

главные направления $(B - \lambda_j G)a_j = 0$

Теорема **Ф-ла Эйлера**

Пусть $\hat{k}$ – кривизна нормального сечения, проведенная в направлении ξ

$$\boxed{\hat{k} = \sum_j \lambda_j \cdot \cos^2 \alpha_j, \text{ где } \lambda_j \text{ угол между } e_j \text{ и } \xi}$$

$\varnothing$ Считаем, что ξ – единичный

$\hat{k} = \frac{b(\xi)}{\cancel{g(\xi)}_{1}} = \sum_j \lambda_j \xi^{j^2}$ $j \Rightarrow \lambda_{jj}$

в базисе главных направлений

ξ^j – координаты ξ в базисе e_j, поскольку базис e_j ортонормированный

$\xi^j = (\xi, e_j) = \cos \alpha_j$

Следствия

1) Будем считать, что λ_1 – максимальное из λ_i.

Поскольку $|\xi| = 1 \Rightarrow 1 = \underbrace{\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_j}_{\text{двумерная пов-сть}}$ $= \cos^2 \alpha_2$

$\Rightarrow \hat{k} = \lambda_1 \cdot \cos^2 \alpha_1 + \lambda_2 \cdot \cos^2 \alpha_2$

$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$

$\hat{k} = \lambda_1 - \lambda_1 \cos^2 \alpha_2 + \lambda_2 \cos^2 \alpha_2$ $\boxed{\cos^2 \alpha_1 = 1 - \cos^2 \alpha_2}$

$\hat{k} = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) \cos^2 \alpha_2$

$\lambda_1 > \lambda_2$

$\Rightarrow \lambda_2 - \lambda_1 < 0$

$\Rightarrow$ какое $\tilde{k}$ мы бы не выбрали $\tilde{k} \leq \lambda_1$

$$\tilde{k} = \lambda_j \cdot \underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{\{\xi^j\}^2} \Rightarrow \tilde{k}(e_i) = \lambda_i$$

2) $\lambda^+ = \max\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$

$\lambda^- = \min\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ аналогично для $-$ доказывается

Опр Средняя кривизна пов-ти M

$$H = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \quad (\text{След матрицы})$$

Опр Гауссова кривизна

$$K = \prod_{i=1}^{n} \lambda_j \quad (\det \text{ матрицы})$$

$$\det(B - \lambda G) = 0 \longrightarrow \det G \cdot \det(B \cdot G^{-1} - \lambda E) = 0$$

$\det(B \cdot G^{-1} - \lambda E) = 0$ решаем ур-е

Хар-ское ур-е $\quad$ tr – след матрицы

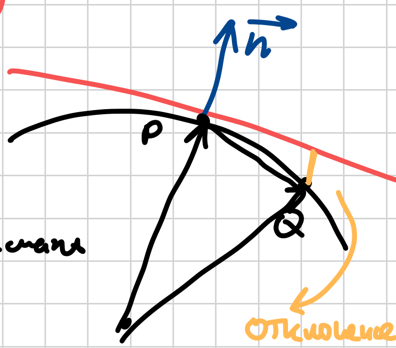
$$\lambda^n = (\mathrm{tr}\, B G^{-1}) \lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(B G^{-1}) = 0 \Rightarrow \text{по т. Виета}$$

$$\boxed{\begin{aligned} H &= \mathrm{tr}(B G^{-1}) \\ K &= \det(B G^{-1}) = \frac{\det B}{\det G} \end{aligned}}$$

Опр Отклонение Q от $T_P M$

$$S(Q) = (r(Q) - r(P), n(P))$$

т.е. проекция разницы на нормаль



Замечание

Эта фун-я беск. дифф-ма от коорд на пов-ти (r - беск дифф, $n = const$)

Утв $S(P) = 0 \quad d_P S = 0 \quad d_P^2 S = b \quad P$ - крит точка

$S(u_1, \dots, u_n) \quad \left.\frac{\partial S}{\partial u^i}\right|_P = 0 \quad \left.\frac{\partial^2 S}{\partial u_j \partial u_i}\right|_P = b_{ij} = (r_{ij}, n)$

$\mathcal{D}$ $S(u) = ((r(u) - r(P), n(P))$

$$\frac{\partial S}{\partial u_j} = \Big(\underbrace{\frac{\partial r}{\partial u_j}}_{r_j}, \vec{n}(P)\Big) = 0$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial u_i \partial u_j} = \Big(\underbrace{\frac{\partial^2 r}{\partial u_i \partial u_j}}_{"r_{ij}}, \vec{n}(P)\Big) = b_{ij}$$

Замечание

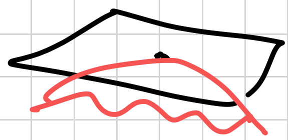
Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ одного знака, тогда некоторая окр-ть т. P на M лежит по одну сторону от кас. пл-ти

$\mathcal{D}$ Пусть $\exists i, j : \lambda_i, \lambda_j < 0 \Rightarrow$ у $S(u)$ нет экстремума, тогда $\forall$ окр-ти т. P лежит по обе стороны T_PM

Если $n = 2$, тогда $K = \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ различают знак

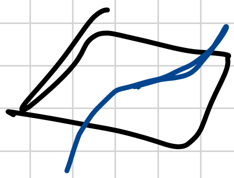
Гауссовой кривизны

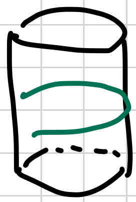
Опр P — эллиптическая, если $K(P) > 0$



Опр P — гиперболическая, если $K(P) < 0$

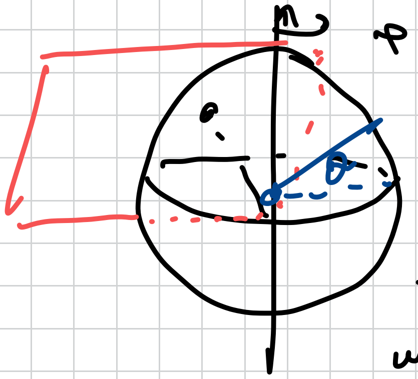
Опр P — параболическая, если $K(P) = 0$





(может быть и то и другое)

Геометрия на сфере



$x=(x_1,x_2,x_3)$ $\quad M(S^2)_{\text{сфера}} = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 = R^2$

в сфер. координатах

$$r = (R\cos\theta\cdot\cos\varphi,\ R\cos\theta\sin\varphi,\ R\sin\theta)$$

широта $\frac{\partial r}{\partial\theta}$ $\quad r_\theta = (-R\cos\theta\cos\varphi,\ -R\cos\theta\sin\varphi,\ R\cos\theta)$

долгота $\frac{\partial r}{\partial\varphi}$ $\quad r_\varphi = (-R\cos\theta\sin\varphi,\ R\cos\theta\cos\varphi,\ 0)$

$$G = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\cos^2\theta \end{pmatrix}$$

Утв Касательная пл-ть к S^2 в т. x — пл-ть ортогональная вектору x

Д Пусть γ кривая на сфере $x=\rho(t)$

$(\rho,\rho)=\underbrace{R^2}_{\text{const}}$ — лежит на сфере

$2(\rho,\dot\rho)=0$

Утв Любые ортогон. преобразования — это изометрия (поворот отн-но оси, отражение отн-но пл-ти, ось и пл-ть через центр координат)

Д $(Ax,Ay)=(x,y) \Rightarrow$ сохр. длины и углы и ортог. преобразования не двигают сферу отн-но начала координат

Опр Большой круг на сфере — пересечение сферы с 2пл-стью, проходящей через её центр

Утв Геодезические на сфере — дуги больших кругов

Д

Рассмотрим дугу большого круга

$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$, ускорение $\dot\gamma$ любого большого круга направлено к центру => совпадает с радиус-вектором => $\perp T_pM$

=> $\Pi(\dot\gamma) = 0$

Теперь покажем, что других геодез. нет.

Проведем кривую. Пусть она геодезическая. Тогда по св-ву геодезических в каждой точке в ровно одном направлении можно провести только одну геодез, но мы можем провести большой круг в том же направлении.

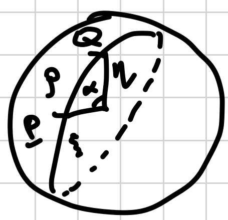
Опр Расстояние между т. P и Q на S^2 — длина кратчайшей дуги геодезич., соединяющей P и Q

Утв Пусть ξ и η — радиус-векторы, тогда $(\xi, \eta) = R^2 \cos\frac{\rho}{R}$

Д-во $\rho = R\alpha$ => $\alpha = \frac{\rho}{R}$ $\quad |\xi| = |\eta| = R$

↑ дуга

$(\xi, \eta) = R^2 \cos\frac{\rho}{R}$



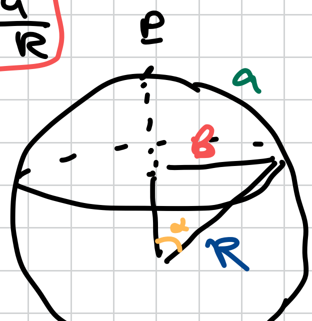
Опр Окр-ть с центром в т. P радиуса a — мн-во точек $\in S^2$, находящихся от P на расстоянии a.

↑ двумерной сферы

← на маленьком примере ок-сть

Теорема

Длина l окр-ти радиуса a: $\boxed{l = 2\pi R \sin\frac{a}{R}}$



Д-во $l = 2\pi b$ $\quad b = R\cdot\sin\alpha$ $\quad a = R\cdot\alpha$

Замечание

$\sin\frac{a}{R} < \frac{a}{R}$ на Земле $l < 2\pi a$

Утв $\lim\limits_{R\to\infty} \dfrac{\ell(a)}{2\pi a} = 1$ **Д** $\dfrac{\ell}{2\pi a} = \dfrac{2\pi R\cdot \sin\frac{a}{R}}{2\pi a} = \dfrac{\sin a/R}{a/R} \to 1$

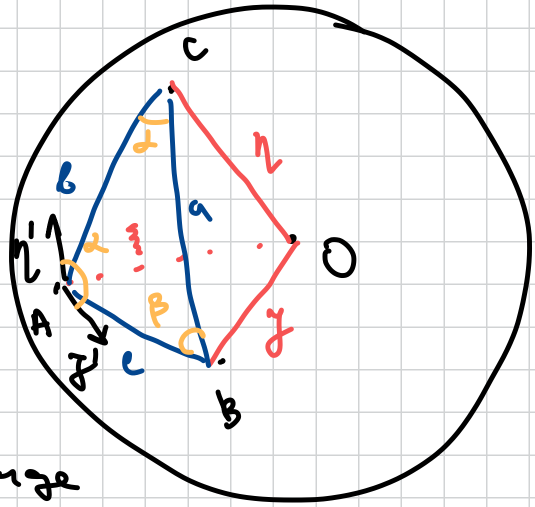
$a/R \to 0$ — замеч. предел

Опр Сферический треугольник — это три точки, не лежащие на одной геодезической, попарно соединенные геодезическими

Теорема Сферическая теорема косинусов

$$\boxed{\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \sin\frac{b}{R}\cdot\sin\frac{c}{R}\cdot\cos\alpha}$$

Д Проведем радиус-векторы ξ, η, ζ из вершины A два кас. вектора η' и ζ'



$$\cos\alpha = \frac{(\eta',\zeta')}{|\eta'||\zeta'|}$$

Вектор η' лежит в пл-ти ξ и η

Вектор η' лежит в пл-ти ξ и η

$\Rightarrow$ его можно представить в виде лин. комб.

$$\eta' = \eta + \lambda\xi \quad \Big|\cdot\xi \text{ скалярно} \qquad \xi \perp \eta'$$

$$0 = \underbrace{(\eta,\eta)}_{R^2} + \lambda\underbrace{(\eta,\xi)}_{R^2\cdot\cos\frac{b}{R}} \Rightarrow \lambda = -\cos\frac{b}{R} \Rightarrow$$

$$\eta' = \eta - \cos\frac{b}{R}\xi$$

аналогично $\rightarrow$ $\zeta' = \zeta - \cos\frac{c}{R}\xi$

$$(\eta',\zeta') = \underbrace{(\eta,\zeta)}_{R^2\cdot\cos\frac{a}{R}} - \cos\frac{c}{R}\underbrace{(\eta,\xi)}_{R^2\cdot\cos\frac{b}{R}} - \cos\frac{b}{R}\underbrace{(\zeta,\xi)}_{R^2\cdot\cos\frac{c}{R}} + \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R}\underbrace{(\xi,\xi)}_{R^2}$$

$$= R^2\cdot\cos\frac{a}{R} - R^2\cos\frac{c}{R}\cdot\cos\frac{b}{R}$$

$$|\eta'| = \sqrt{(\eta',\eta')} = \sqrt{\left(R^2 - R^2\cdot\cos^2\frac{b}{R}\right)} = R\sin\frac{b}{R}$$

$|\gamma'| = R \cdot \sin\frac{c}{R} \Rightarrow \boxed{\cos\alpha = \dfrac{\cos a/R - \cos b/R \cos c/R}{\sin b/R \cdot \sin c/R}}$

Замечание

при $R \to \infty \Rightarrow \frac{1}{R} \to 0$ по Тейлору cos до второго, sin до первого

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha + o\left(\frac{1}{R^4}\right)$$

Задача док-ть т. синусов

$$\boxed{\frac{\sin a/R}{\sin\alpha} = \frac{\sin b/R}{\sin\beta} = \frac{\sin c/R}{\sin\gamma}}$$

Д

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{(\cos a/R - \cos b/R \cdot \cos c/R)^2}{\sin^2 b/R \cdot \sin c/R}}$$

$$= \frac{\sqrt{\dots}}{\sin b/R \ \sin c/R}$$

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{\dots}}{\sin a/R \ \sin c/R}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin a/R} = \frac{\sin\beta}{\sin b/R}$$

Равенство числителей

$$\sin^2 b/R \ \underbrace{\sin^2 c/R}_{1-\sin^2 c/R} - \cos^2 a/R \cancel{+ \cos a/R \ R\cos b/R \cdot R\cos c/R} + \cos^2 b/R \cos^2 c/R$$

$$\overset{?}{=} \sin^2 a/R \sin^2 c/R - \cos^2 b/R \cancel{+ \cos \dots\dots} + \cos^2 a/R \cdot \cos^2 c/R$$

$$\cos^2 b/R + \sin^2 b/R = \sin^2 a/R + \cos^2 a/R = 1 \quad \checkmark$$

Опр Сферические треугольники наз. равными, если $\exists$ изометрия, переводящая треуг. в другой.

Признаки равенства треугольников

1) 3 стороны
2) 2 стороны и угол } из т. cos, sin
3) 2 угла и сторона }
4) 3 угла $\leftarrow$ из двойств. т. cos.

Опр Конструкция полярных тр-в

в $A'B'C'$ – красные прямые $\perp$ большим кругам

Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 – радиус векторы тр. ABC

ξ_1', ξ_2', ξ_3' – $A'B'C'$

$$(\xi_1', \xi_2) = (\xi_1^{\perp}, \xi_3) = 0$$
$$(\xi_1', \xi_1) > 0$$
} опр полярного тр-ка

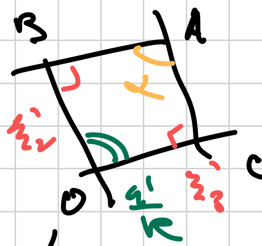
Утв Полярный и сфер треуг взаимообратны

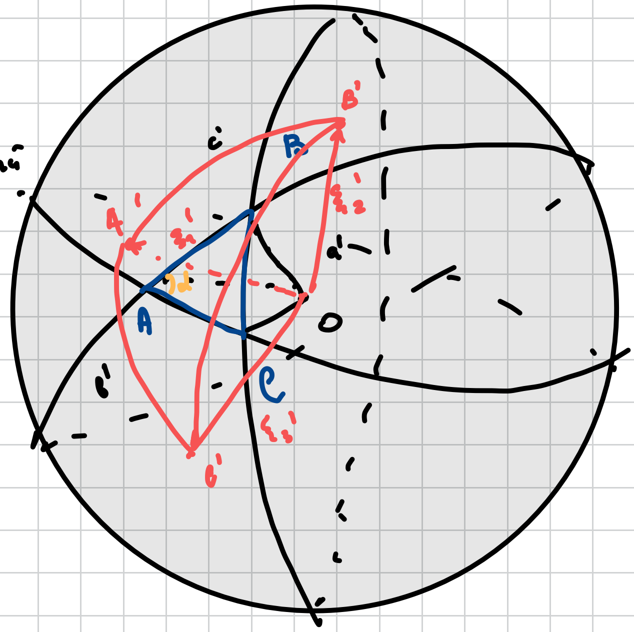
угол α – двугранный угол между пл-ми OAB и OAC,

$\frac{a'}{R}$ – угол между ξ_2' и ξ_3'

$\xi_2' \perp OAB$

$\xi_3' \perp OAC$





α и $\frac{a'}{R}$ либо равны, либо отлич на π

Из рисунка: $\frac{a'}{R} + \alpha = 180 = \pi$

$$\Rightarrow \frac{b'}{R} + \beta = \pi, \quad \frac{c'}{R} + \gamma = \pi$$

Теорема Двойственная теорема косинусов

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a/R$$

Д-во Напишем т. cos для полярного тр-ка

$$\cos\frac{a'}{R} = \cos\frac{b'}{R}\cdot\cos\frac{c'}{R} + \sin\frac{b'}{R}\cdot\sin\frac{c'}{R}\cdot\cos\alpha'$$

↘ заменим α, β, γ.
и $\alpha' + \frac{a}{R} = \pi$

$$-\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma\cos a/R$$

Замечание

при $R \to \infty$ $\cos\frac{a}{R} \to 1$

$$\Rightarrow \cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma$$

$$\cos\alpha = -\cos(\beta+\gamma)$$

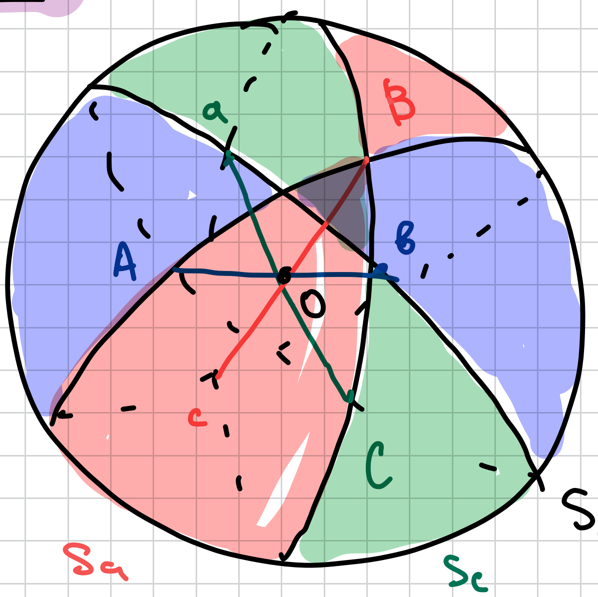
$$\cos(-\alpha+\pi) = \cos(\beta+\gamma)$$

$$\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$$

Теорема Пусть α, β, γ - углы сферического тр-ка, а S - его площадь, тогда

$$\boxed{\alpha+\beta+\gamma = \pi + \frac{S}{R^2}}$$

Д



Рассмотрим площадь на пл-ти S^2 образованную большими кругами AB и AC. обозначим её S_A

Очевидно $S_A \sim \alpha \Rightarrow S_A = \lambda \cdot \alpha$, если $\alpha = \pi$, то $S_A = 4\pi R^2$

$4R^2(\alpha+\beta+\gamma) = S_a + S_B + S_c$

S_A, S_B, S_C - это как дольки апельсина

Заметим, что $\triangle ABC$ и $\triangle abc$ покрыты 3 цветами

$\Rightarrow$ 4 лишних $S_\triangle$

$$\Rightarrow 4R^2(\alpha+\beta+\gamma) = 4\pi R^2 + \underbrace{4S}_{\text{лишние}}$$

$$\Rightarrow \alpha+\beta+\gamma = \pi + \frac{S}{R^2}$$

Пр-во Минковского

Опр (n+1)-мерное пр-во Минковского M^{n+1} — линейное пр-во, в котором задана билинейная форма сигнатура $(n, 1)$ (псевдоевклидово скалярное пр-е) (g

(n плюсов, 1 минус) (помним, координатные)

отриц компонента (выделенная временная)

$\exists$ базис $e_0, \dots, e_n$, что значение псевдоформы (канон вид)

$$(\xi, \eta) = -\xi_0 \eta_0 + \sum_{j=1}^{n} \xi_j \eta_j \text{ — скалярное пр-е}$$

незнаконопределено, матрица имеет вид $\begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

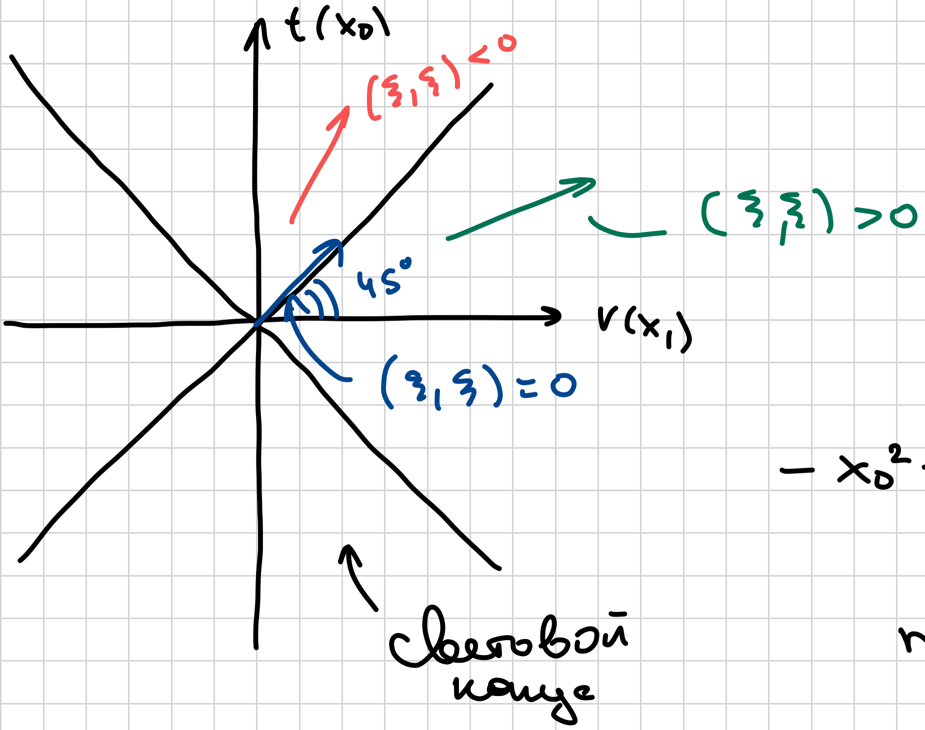
Пример: $ds^2 = \underbrace{-c^2 dt^2}_{\text{временная}} + \underbrace{dx^2 + dy^2 + dz^2}_{\text{пространственная}}$

Опр Вектор ξ наз

пространственно-подобным, если $(\xi, \xi) > 0$

времениподобным, если $(\xi, \xi) < 0$

светоподобным, если $(\xi, \xi) = 0$



Замечание

$(x_0, \dots, x_n)$ — ортонормированный базис для светоподобных векторов

$$-x_0^2 + \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = 0 \text{ — конус в } \mathbb{R}^n$$

$n = 1 \quad x_0^2 = x_1^2$

Опр Световой конус – мн-во векторов $\xi \in M : (\xi, \xi) = 0$

пр-во Минковского

Опр Преобразование Лоренца – линейный оператор пр-ва Минковского, который сохраняет псевдоскалярное пр-е.

Проще говоря, преобразования Лоренца – сохраняют инвариант. Т.е ds^2 не меняется во всех ИСО.

Утв (Линейный оператор является оператором Лоренца) $\longleftrightarrow$ (ортонормированный базис он переводит в ортонормированный)

N подп-во в M $(,)|_N$ – ограничение формы (берем только из N) (добавлено условие)

сужение

N_0 – ядро ограничения $(,)|_N$ $\quad N_0 = \{\xi \in N : (\xi, \eta) = 0\}$ $\forall \eta \in N$

в $\mathbb{R}^n$, $\forall$ подпр-ва L есть ортогональное дополнение $L^\perp$ – пр-во векторов $\perp L$ => $L \oplus L = \mathbb{R}^n$, $L \cap L^\perp$ только по нулевому вектору

Опр Векторы ξ, η ортогональны, если $(\xi, \eta) = 0$

Опр Ортогональное дополнение к N – это $N^\perp = \{\xi \in M : (\xi, \eta) = 0\}$ $\forall \eta \in N$

Теорема

1) $\dim N^\perp = \dim M - \dim N$
2) $(N^\perp)^\perp = N$
3) $N \cap N^\perp = N_0$ – огр-е псевдоформы на под-во M

1) Выберем базис в N $(u_1, \ldots u_k)$ и дополним его до всего пр-ва $u_{k+1}, \ldots, u_{n+1}$ - базис M

Пусть $\xi \in N^\perp \Rightarrow \xi \perp (u_1, \ldots, u_k) \Rightarrow (\xi, u_j) = 0$

$j = 1, \ldots k$ – система лин. ур-ний отн-но коорд вектора ξ в базисе M

Тогда ур-ний k, неизвестн $n+1$ и все ур-я линейно независимы, т.к (ξ, u_j) - кусок $(,)|_\perp$, а $(,)$ невырожд-но $\overset{\nearrow}{\text{иначе}}$ $\Rightarrow$ пр-во решений $\dim N = n+1 - \underset{\dim M}{\underbrace{\hat{k}}}$ $\dim N$

$(\xi, u_j) = 0 \Rightarrow \xi = 0$

2) $\xi \in (N^\perp)^\perp \longleftrightarrow (\xi, \eta) = 0$ $\forall \eta \in N^\perp \Rightarrow$ под-во N содержится в орт. дополнении + размерности одинаковые $(N^\perp)^\perp$ и N совпадают

3) по опр N_0 и по опр N

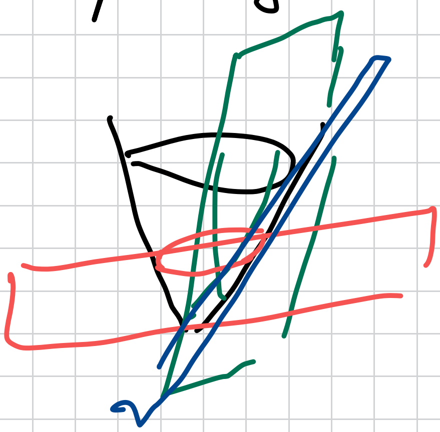
Пусть $N_0 = \{0\} \Rightarrow \underline{N \oplus N^\perp = M}$

(нет времени)

Опр под-во N – эллиптическое, если $(,)|_N$ – полож определена

– гиперболическое, если сигнатура $(n, 1)$ (есть время)

– параболическое, если $\ominus$ пр-во M



$(,)|_N$ – вырождена

$(\xi, u_j) = 0$

Замечание Если N – эллиптическое, то $N^\perp$ – гиперпл. и наоборот (ядро N_0 нулевое)

Теорема Пусть N – параболическое, тогда N_0 – одномерно и $\forall \xi \in N$ такие, что $\xi \notin N_0$ $(\xi, \xi) > 0$

1. Докажем, что N_0 одномерно (от противного)

Рассмотрим $\xi \in N_0$, тогда $(\xi, \xi) = 0 \Rightarrow$

$$-\xi_0^2 + \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 = 0$$

ортонормированный базис $e_0, \underbrace{e_1, \dots, e_n}_{\tilde{\xi}}$ $\quad \tilde{\xi} = \xi - e_0$

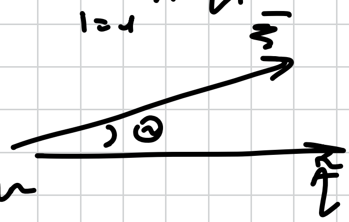
$\Rightarrow$ перепишем как $\xi_0^2 = (\tilde{\xi}, \tilde{\xi}) = |\tilde{\xi}|^2$

$$\Rightarrow \quad \xi_0 = |\tilde{\xi}| \quad (*)$$

Рассмотрим еще один вектор $\eta \in N_0 \Rightarrow$ для него выполнено то же самое $\eta_0 = |\tilde{\eta}|$

Я хочу доказать, что ξ и η ортогональны друг другу

Пусть это так: $0 = (\xi, \eta) = -\xi_0 \eta_0 + \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i$



$|\tilde{\xi}| \cdot |\tilde{\eta}| \overset{(*)}{=} \eta_0 \cdot \xi_0 = (\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \cdot \underbrace{1}_{\cos\theta} \Rightarrow$ векторы параллельны $\Rightarrow \tilde{\eta} = \lambda \tilde{\xi}$

$$\xi_0 \eta_0 = (\tilde{\xi}, \lambda \tilde{\xi}) = \lambda |\tilde{\xi}|^2$$

$\rightarrow \eta_0 = \lambda |\tilde{\xi}| = \lambda \xi_0$ — лин. зависимость

$\Rightarrow N_0$ — однозначно

2. Докажем, что $\forall \xi \in N \notin N_0 \quad (\xi, \xi) > 0$

Рассмотрим $\eta \in N$, $\eta \notin N_0$ и $\xi \in N_0$

$$0 = (\xi, \eta) = -\xi_0 \eta_0 + (\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$$

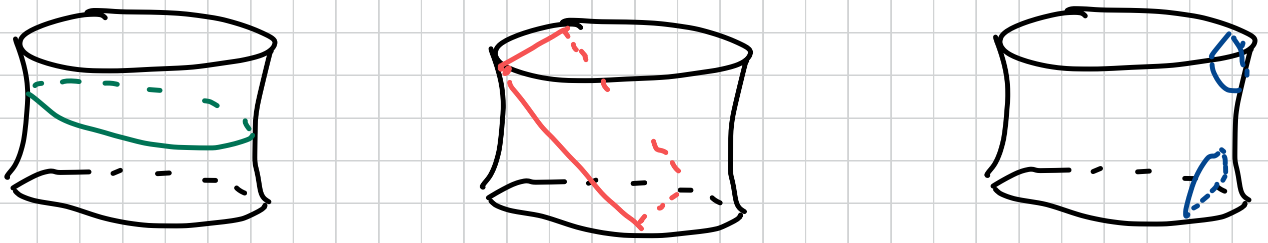
$\eta_0 = \left(\frac{\tilde{\xi}}{|\xi_0|}, \tilde{\eta} \right)$ — они не параллельны т.к $\tilde{\xi}$ и $\tilde{\eta}$ лежат в разных пр-вах

$\Rightarrow |\eta_0| < |\tilde{\eta}| \Rightarrow (\eta, \eta) = -\eta_0^2 + |\tilde{\eta}|^2 > 0$

получим, что $N \cap N^{\perp} = N_0$

параболическое

Примеры в $\mathbb{R}^3$



Эллиптическое   Параболическое   Гиперболическое

Преобразование Лоренца

Утв Пусть A - матрица преобразования Лоренца в ОНБ $e_0, \dots, e_n$, тогда матрица удовл:

$$A^T E' A = E \qquad E' = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \; 1 \end{pmatrix}$$

$\exists$ базис в котором E принимает канон вид.

Д При преобразованиях Лоренца ОНБ $\to$ ОНБ $\Rightarrow$ матрица в нем будет такая же - E. При применении линейного преобразования матрица $\forall$ билинейной формы преобразуется: $E' = A^T E A$

Преобразование будет лоренцевым, если $E' = E$

$$A \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad A^T \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$A^T \cdot E' = \begin{pmatrix} -a & c \\ -b & d \end{pmatrix}$$

$$E' \cdot A = \begin{pmatrix} -a^2 + c^2 & -ab + cd \\ -ab + cd & -b^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a^2 - c^2 = 1 \\ d^2 - b^2 = 1 \\ cd = ab \end{cases} \rightsquigarrow$$

считаем $a > 0$, $d > 0$

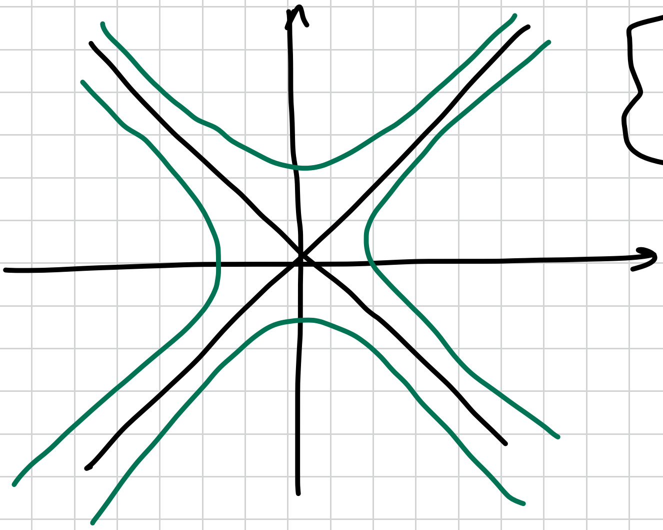
$\Rightarrow$ $a = \operatorname{ch} \chi$, $c = \operatorname{sh} \chi$

$d = \operatorname{ch} \psi$, $b = \operatorname{sh} \psi$

$\psi = \chi$

Следств $\rightarrow$ $A = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \chi & \operatorname{sh} \chi \\ \operatorname{ch} \chi & \operatorname{sh} \chi \end{pmatrix}$

Опр Матрица A наз матрицей гиперболического поворота



$-x_0^2 + x_1^2 = const$
псевдоевклидов квадрат

Замечание Если $a<0$ $d<0$, то

Вариант I
$$\begin{pmatrix} -ch\, x & -sh\, x \\ -sh\, x & -ch\, x \end{pmatrix}$$

Вариант II – III
$$(\pm ch\,\psi)(\pm sh\,\psi) - (\pm sh\, x)(\pm ch\,\psi) = 0$$

должны получить
$$sh(x-\psi) = 0$$
$$\begin{pmatrix} ch\, x & -sh\, x \\ sh\, x & -ch\, x \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} -ch\, x & sh\, x \\ -sh\, x & ch\, x \end{pmatrix}$$

Опр Длина времениподобного $\xi \in M$
$$|\xi| = \sqrt{-(\xi,\xi)} \qquad (\xi,\xi) < 0$$

Утв Пусть ξ, η – времениподобные векторы. Тогда
$$|(\xi,\eta)| \leq |\xi|\cdot|\eta|$$
– аналог Коши-Буняковского
?, $\geq$?

Д Выберем ОНБ $e_0, \dots, e_n$, чтобы
$\xi = \xi_0 e_0$, тогда $(\xi,\eta) = -\xi_0\eta_0$
будет $|\xi_0\eta_0|$ стоять слева
$$(|\xi|\cdot|\eta|)^2 = |\xi|^2|\eta|^2 = +\underbrace{(\xi,\xi)}_{-\xi_0^2}\overbrace{(\eta,\eta)}^{(-\eta_0^2+\eta_i^2)} =$$
$$= \xi_0^2\eta_0^2 - \underbrace{\xi_0^2\eta_j^2}_{\geq 0} \leq |\xi_0|^2|\eta_j|^2$$

Опр Две времениподобные вектора одинаково ориентированы во времени, если $(\xi,\eta) < 0$

лежат в одной половине конуса

Теорема **Неравенство тр-ка**

Пусть векторы ξ и η — времениподобные и одинаково ориент во времени, тогда

$$\boxed{|\xi+\eta| \geq |\xi| + |\eta|}$$

Д $|\xi+\eta|^2 = -(\xi+\eta, \xi+\eta) = -(\xi,\xi) - 2(\xi,\eta) - (\eta,\eta)$

$= |\xi|^2 + |\eta|^2 - 2(\xi,\eta) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{одинаково} \\ \text{ориент}}}{=} |\xi|^2 + |\eta|^2 + 2|(\xi,\eta)| \geq$

$\geq |\xi|^2 + |\eta|^2 + 2|\xi||\eta|$

$= (|\xi| + |\eta|)^2$

Рассмотрим частицу

Опр $\begin{cases} x_0 = ct \\ x_j = x_j(t) \end{cases}$ — мировая линия — кривая, вдоль которой движется частица

Вектор скорости $\xi = (c, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$

$(\xi,\xi) = -c^2 + \dot{x}_j^2 = -c^2 + v^2 \leq 0$ (медленнее скорости света)

Если масса ненулевая, то его касательный вектор к мировой линии времениподобен

Если фотон, то линия светоподобна

Опр Частица или наблюдатель инерциален, если мировые линии прямая

Предположим два инерциальных наблюдателя $\Rightarrow$ с каждым можно связать ОНБ

$e_0, \dots, e_n$ и $e_0', \dots, e_n'$

Опр Произвольный вектор ξ в пр-ве Минковского — событие

1) Относительно одновременности

Пусть есть два события ξ_1, ξ_2 и для инерциального наблюдателя они проходили в один и тот же момент времени $\xi_1^0 = \xi_2^0$ $\tilde{\xi}_1 \neq \tilde{\xi}_2$ t - одинаковы. Пусть один вектор нулевой (начало координат), а второй $(t=0) \Rightarrow \xi = \tilde{\xi}$, если разложить по другому базису, то координата ξ' не будет нулевой $\Rightarrow$ они не одновременны для наблюдателя

2) Замедление времени

Наблюдатель посмотрел на часы, причём первый просмотр - начало координат; $\tilde{\xi} = 0$, т.к. он стоит на месте $\Rightarrow \xi_2 = \xi_0 \cdot e_0$

, наблюдатель движется $\Rightarrow \xi_2 = \xi_0' e_0' + \xi_1'$

посчитаем скалярный квадрат $\xi_0^2 = -\xi_0'^2 + |\tilde{\xi}'|^2$

$\xi_0^2 = (\xi_0')^2 - |\tilde{\xi}'|^2 < (\xi')^2$ - время замедлилось

3) Сокращение длин

Для наблюдателя стержень неподвижен, возьмём два события для краёв стержней, относительно наблюдателя стержень движется $(e_1, .., e_n)$ $(e_1, \dots, e_n)$

одно событие - начало координат, второе совпадает по времени $t' = 0$

$\xi = \xi' = \xi_0 e_0 + \tilde{\xi}$

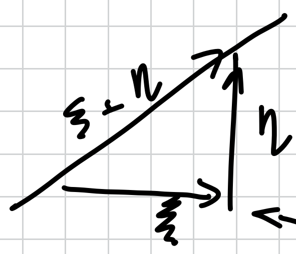
$|\xi'|^2 = |\tilde{\xi}|^2 - \xi_0^2$

$(\xi')^2$ $\quad$ "e^2"

$(\xi')^2 < \xi^2$

4) Парадокс близнецов

мировая линия 1-го $\longrightarrow$



$\leftarrow$ мировая линия второго

$t = \frac{|\xi + \eta|}{c}$

$t' = \frac{|\xi| + |\eta|}{c}$

$t \geq t'$

Геометрия Лобачевского

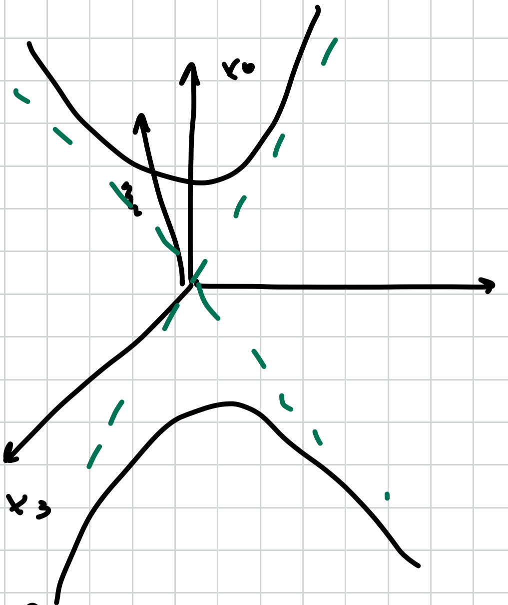
Рассмотрим M^3

Опр Единичная мнимая псевдосфера — мн-во $\xi \in M^3$

$$(\xi, \xi) = -1$$

Замечание e_0, e_1, e_2 $\quad (x_0, x_1, x_2)$

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = -1$$



$x_0^2 = x_1^2 + x_2^2 + 1$ — двухполостный гиперболоид вращения

Пусть L — верхняя половина псевдосферы

Утв $T_\xi L$ — 2-плоскость ортогон. ξ

Д $\gamma: \xi(t)$ — кривая на L

$(\xi, \xi) = -1 \to 2(\xi, \dot\xi) = 0$

Следствие Все кас-е пл-сти к L евклидовы или эллиптические

Опр Тем самым псевдоевклидово скалярное пр-е на $T_\xi L$ задает первую кв. форму $(\ ,\ )$ — обычное скалярное произведение (налож опр) пов-ть L с $1^й$ кв формой — пл-ть Лобачевского

Утв Любые преобразования Лоренца, сохраняющие верхнюю половину светового конуса — изометрии L

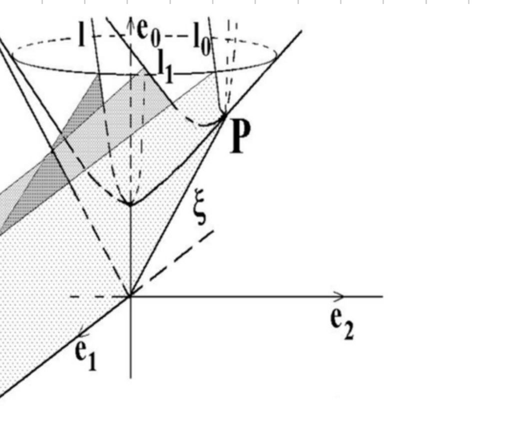
Утв Геодезические на L — пересечение L с 2 плоскостями, проходящими через O

Д $\xi(t)$ — кривая $\dot\xi(\dot\xi, \dot\xi) = 0$ — натур. параметризация

$\Rightarrow$ вектор ускорения вдоль радиус-вектора

$\ddot\xi \perp \dot\xi$ и $\dot\xi \perp \xi$, поскольку плоскость

Аналогично для сферы: мн через каждую т. склоним провести 2-пл-сть $\Rightarrow$ противоречие со св-м геодезической



Геодезическая плоскости Лобачевского

Нарушение $5^{го}$ постулата

рассмотрим геодезическую, проходящую через ось x_1 и вектор ξ, получим еще геодезическую. Теперь будем поднимать линию пересечения второй пл-ти с первой (поворачивать), пока OX не совпадет с временным конусом $\Rightarrow$ будут новые пространственно-подобные геодезические, кот. не пересекаются с исходной $\Rightarrow$ их бесконечно много. т.е. можно провести бесконечно много прямых парал. данной. Противоречие.

Параметризуем L $\quad x_0^2 = 1 + x_1^2 + x_2^2$

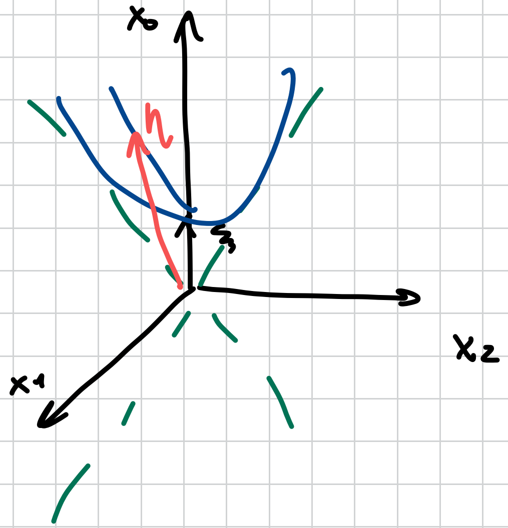
$$\begin{cases} x_0 = \operatorname{ch} x \\ x_1 = \operatorname{sh} x \cos\varphi \\ x_2 = \operatorname{sh} x \sin\varphi \end{cases} \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \operatorname{sh}^2 x \end{pmatrix}$$

Опр Расстояние между т. на L - длина дуги геод. соед. эти точки

Утв Пусть $\xi, \eta \in L$ ρ - расстояние. Тогда $\boxed{\operatorname{ch}\rho = -(\xi, \eta)}$

Д При изометриях не меняются расстояние и $(\,,\,)$

$\Rightarrow$ достаточно проверить для таких векторов:



$\xi\,(1, 0, 0)$

$\eta = (x_0, x_1, 0)$ - лежит в пл-ти $(x_1\ x_0)$

$\eta = (\operatorname{ch}\chi_0, \operatorname{sh}\chi_0, 0)$

$(\xi, \eta) = -\operatorname{ch}\chi_0$ $\quad$ лежит в пл-ти (x_1, x_0)

ур-е геод $\begin{cases} x = t \in [0, x_0] \\ \varphi = 0 \end{cases}$

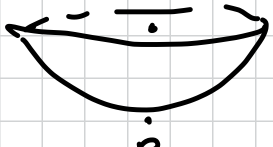
$\dot\gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |\dot\gamma| = \sqrt{\dot\gamma^T G \dot\gamma} = 1$

$$\rho = \int_0^{\chi_0} |\dot\gamma|\, dt = \chi_0$$

Опр Окр-ть на L с центром в т. P радиуса a — мн-во точек L, находящихся от P на расстоянии a

Утв Длина окр-ти r = a

$$\boxed{l = 2\pi \operatorname{sh} a}$$



$$\gamma : \begin{cases} x = x_0 = a \\ \varphi = \varphi(t) = t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

$$\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |\dot{\gamma}|^2 = \operatorname{sh}^2 \chi_0$$

$$l = \int_0^{2\pi} \operatorname{sh} \chi_0 \, dt = 2\pi \operatorname{sh} \chi_0 = 2\pi \operatorname{sh} a$$

Задача Д-ть т. cos и т. sin и дв теор. косин.

$$\boxed{\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} b \cdot \operatorname{sh} c \cdot \cos\alpha}$$

$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{\operatorname{sh} a} = \frac{\sin\beta}{\operatorname{sh} b} = \frac{\sin\gamma}{\operatorname{sh} c}}$$

$$\boxed{\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma \operatorname{ch} a}$$

Д аналогично док-ву на сфере

Задача Доказать, что $\alpha + \beta + \gamma < \pi$

$$\operatorname{ch} a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta \cdot \cos\gamma}{\sin\beta \cdot \sin\gamma} \underset{\alpha > 0}{>} 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \cos\alpha > \sin\beta \sin\gamma - \cos\beta \cdot \cos\gamma$$

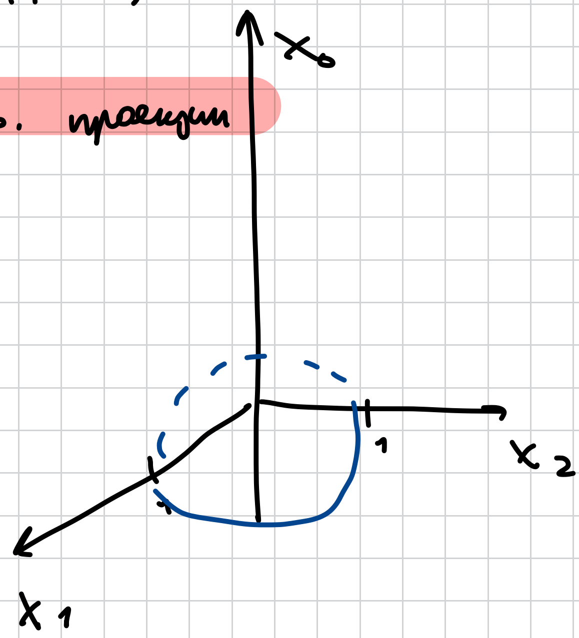
$$\cos(\alpha) + \cos(\beta + \gamma) > 0$$

$$\leftarrow \quad 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta - \gamma}{2}\right) > 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha + \beta + \gamma > \pi$$

Опр Стереографически проекция — окр-сть единичного радиуса на (x_1, x_2)

Первая квадр на Стереограф. проекции



$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} \frac{(1-\rho^2)^2}{4} & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}$$

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Опр Единичный круг в котором задана $\tilde{G}$ наз моделью Пуанкаре в единичном круге

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} \frac{1-(x_1^2+x_2^2)^2}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1-(x_1^2+x_2^2)^2}{4} \end{pmatrix}$$