Алгебра и числа

Опр **Бинарным отношением** в мн-ве A наз-ся подмн-во $\rho \subset A \times A$

Опр Бинарное отношение — **отношение порядка**, если:

1. Рефлексивно, если $\forall a \in A$ и $\rho \subset A \times A$, то $(a,a) \in \rho$
2. Транзитивно, если $\forall a, b, c$ $(a,b) \in \rho$ и $(b,c) \in \rho$, то $(a,c) \in \rho$
3. Антисимметрично, если $\forall a\ b$ $((a,b) \in \rho \wedge (b,a) \in \rho) \to a = b$

Опр Бинарное отношение — **отношение эквивалентности**, если:

1. Рефлексивно, если $\forall a \in A$ и $\rho \subset A \times A$, то $(a,a) \in \rho$
2. Транзитивно, если $\forall a, b, c$ $(a,b) \in \rho \wedge (b,c) \in \rho$, то $(a,c) \in \rho$
3. Симметрично, если $\forall a, b$ $(a,b) \in \rho \to (b,a) \in \rho$

Опр **Композиция** бинар. отношений ρ и σ: $\rho \in A \times B$ $\sigma \in B \times C$

$$(a,c) \in \sigma \circ \rho \longleftrightarrow \exists b \in B: (a,b) \in \rho \wedge (b,c) \in \sigma$$

Свойства: композиции бин отношений:

1. Если $\rho \subset A \times B$ и $\sigma \subset B \times C$, то $\sigma \circ \rho \subset A \times C$, тоже бин отнош
2. Композиция ассоциативна: $\sigma \circ (\rho \circ \mu) = (\sigma \circ \rho) \circ \mu$
3. $(\rho \circ \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \circ \rho^{-1}$

Опр Пусть $\rho \subset A \times A$ — отн. эквивалентн, тогда $[a] = \rho[a] = \{x \in A : (a,x) \in \rho\}$ — **класс эквивалентности**

Свойства: классов эквивалентности

1. Из рефлексивности: $\forall a \in A : a \in [a]$, т.е всякий класс эквив-непуст мн-во
2. **Теорема** о классах экв. Если ρ — отн экв на A, то $\forall a, b$: $[a] = [b]$ или $[a] \cap [b] = \varnothing$, классы экв либо совпадают либо не пересекаются

Док-во:

Пусть можно, тогда $\exists a\ \exists b : ([a] \neq [b]$ и $[a] \cap [b] \neq \varnothing)$. Пусть a' и b' — элем из A, что это истина $\Rightarrow [a'] \neq [b']$ и $[a'] \cap [b'] \neq \varnothing \Rightarrow \exists c' \in A : c' \in [a']$ и $c' \in [b']$

$\forall a \in [a'] : (a, a') \in \rho$ из транз: $(a,c), (c,a') \in \rho$, но $(c, b') \in \rho \Rightarrow (a, b') \in \rho$ $\Rightarrow a \in [b'] \Rightarrow \forall a \in [a']$ $a \in [b'] \Rightarrow [a'] \subset [b']$ Аналогично с b': $[b'] \subset [a'] \Rightarrow [a'] = [b']$ — противоречие.

Опр Мн-во всех классов экв отвечающих отн экв R на мн-ве A, назыв **фактор-множество** $A \setminus R$

Опр Любое отображение ρ $A \times A \to A$ назыв бин операц. на A.

Опр Мн-во называется **группой**, если:

1. Задана бин. операция – группоид
2. Операция ассоциативна $(a_1 * a_2) * a_3 = a_1 * (a_2 * a_3)$ – моноид
3. $\exists$ e – единица: $a * e = a$ – единичн элемент – полугруппа
4. $\exists$ b $\forall a$: $a + b = e$ – обратный элемент – группа.

Опр Группа назыв. **абелевой**, если она коммутативна $a_1 * a_2 = a_2 * a_1$

Опр Группа состоящая из степеней эл-та назыв. **циклической порождённой** эл-том a

Опр **Кольцо** – мн-ва A на котором введены операции: „+", „*", если:

1. $< A, + >$ – абелева группа
2. $< A, * >$ – полугрупта

Опр Полугруппа $\Delta \subset K$ назыв **идеалом кольца**, если $\forall x \in K$, $\forall z \in \Delta$, $x + z \in \Delta$

Опр **Полем** назыв коммутатив. кольцом содерж >1 эле-тов, в котором все ненулевые эл-ты образуют группу по умножению

Теорема Кольцо явл полем $\longleftrightarrow$ нет нетрив идеалов.

Опр **Тривиальный идеал** – само кольцо + $\{0\}$

Опр Отношение экв **на группе** наз. **конгруэнтностью**, если $(a \sim a')$ и $(b \sim b') \to a * b \sim a' * b'$

Теорема. Если A – комутативн группа, то **конгруэнтностей** на группе **столько, сколько** в A **подгрупп**. Пусть $x, y \in [e] \Rightarrow x * y \sim e * e = e$ – конгруэнтност

Опр Отн. экв. **на кольце** A назовём **конгруэнтностью**, если $(a \sim a')$, $(b \sim b')$ $\to$ $\begin{cases} (a+b) \sim (a'+b') \\ (a*b) \sim (a'*b') \end{cases}$

Теорема. Если на кольце A задана конгруэнтность, то $[0]$ является идеалом кольца A

Док-во: $a \in [0]$, $a \sim 0$, $b \sim b$: $a * b \sim 0 * b = 0 \Rightarrow$ операция $*$ при применении к элементу подкольца к $\forall$ элементу кольца дает элемент подкольца $\rightarrow [0]$ - идеал

Утв. Каждая конгруэнтность задает идеал.

Пусть A - абелева группа, $E \subset A$ - подгруппа. $\exists$ мн-во классов экв группы A по заданой конгруэнтности $(a \sim b \leftrightarrow a*(-b) \in E)$ - фактор мн-во A/E. Введем в $A|E$ операцию $\circledast$: $[a] \circledast [b] = [a*b]$

$[a] * [a^{-1}] = [e]$

Опр Фактор группа - мн-во классов экв по подгруппе, само явл группой отн. заданой операции.

Утв Каждой конгруэнтности отвечает идеал $[0]$ и каждому идеалу отвечает конгр на кольце

Опр Фактор кольца - фактор группа с определённой на ней умножением. Чтобы можно было определить умножение, подгруппа должна являться идеалом

Опр Отображение $f: A \rightarrow B$ наз. гомоморфизмом, если $f(a * b) = f(a) \circledast f(b)$, виды гомоморфизмов:

1. Мономорфизм (инъекция $(\rightrightarrows)$) $\forall a, b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$
   $\ker f = 0$
2. Эпиморфизм (сюръекция $(\overset{A}{\leftleftarrows}\overset{B}{})$) $\forall b \in B \; \exists a \in A: f(a_i) = b$
3. Изоморфизм (биекция)
   $\operatorname{im} f = A$

Опр Ядром гомоморфизма наз $\ker f = \{a \in A, f(a) = e\}$

Опр Образом гом наз. подмножество $\operatorname{im} f = \{b \in B \; \exists a \in A: b = f(a)\}$

Теорема. Любой гомоморфизм групп или колец представляется в виде композиции эпи, изо, и мономорфизма:

$$\varphi = i \cdot \varphi^* \cdot \alpha \quad (i - \text{моно}, \varphi^* - \text{изо}, \alpha - \text{эпи})$$

Опр A – абелева группа, задано отн порядка „≤". Группа A **упорядоченная**, если $\forall a, b, c \in A$ $a \leq b \leftrightarrow a * c \leq b * c$

Св-ва упоряд. групп: $(A^+ = \{a \in A;\ a \geq e\})$

1. $e \in A^+$
2. $a \in A^+$ и $b \in A^+ \to a * b \in A^+$
3. $a, a^{-1} \in A^+ \longrightarrow a = e$ (полугруппа без обратного)

Опр Отн порядка есть отн **полного порядка**, если все элементы в группе **сравнимы**

Опр Отн порядка есть отн **совершенного порядка**, если на мн-ве есть **точная верх и нижн грань.**

Опр **Кольцо упорядочено**, если оно упорядочено как **коммутативная группа отн „+"**

$\forall x \in K^+$ $\forall y, z \in K$ $y \leq z \to x \cdot y \leq x \cdot z$

Свойства K^+

1. K^+ – полугруппа необратимых по „+" эл-тов из K
2. $\forall a, b \in K^+$ $a * b \in K^+$

A – мн-во, „≤" – отн порядка, $\mathcal{E} \subset A$

Опр $a \in A$ – **верх грань** мн-ва $\mathcal{E}$, если $\forall x \in \mathcal{E}$ $x \leq a$

Опр $a \in \mathcal{E}$ – **наиб эл-т** мн-ва в $\mathcal{E}$, если $\forall x \in \mathcal{E}$ $x \leq a$

Утв Если в $\mathcal{E}$ есть **наиб, то он единств.**

Опр $a \in \mathcal{E}$ – **макс элемент** в $\mathcal{E}$, если $\forall x \in \mathcal{E}$ $a \leq x \to a = x$

т.е нет больше, но есть несравнимые

Опр **Точная верх грань** – наим. эл-т во мн-ве всех верхних граней. a, b – верх грани мн-ва $\mathcal{E}$, тогда $\exists a\ \forall b$ $b \leq a \to b = a$, то **$a = \sup \mathcal{E}$**

Теорема. Пусть $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}$ и $\exists \alpha$ – верх грань $\mathcal{E}$, т.е $\forall \beta \in \mathcal{E}$ $\beta \leq \alpha$ тогда у мн-ва $\mathcal{E}$ $\exists$ точная верх грань, т.е наим эл-т во мн-ве всех верх граней.

Метрические пр-ства и числ посл-сти.

Опр Мн-во A назовём **метр. пр-ство**, если
$\exists$ отобр $\rho : A \times A \to \mathbb{R}^1_+ = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$ ρ - метрика

измерение расстояния

св-ва метр. пр-ства:

1. $\rho(a,b) = 0 \Rightarrow a = b$ — рефлексия расстояний
2. $\rho(a,b) = \rho(b,a)$ — симметрия расстояний
3. $\rho(a,b) \leq \rho(a,c) + \rho(c,b)$

Опр Открытый шар с ц в x радиусом r - мн-во точек: $S(x,r) = \{y \in A : \rho(x,y) < r\}$

Опр $x \in A$ - **внутр. точка**, если $\exists\, r > 0 : S(x,r) \subset E$

Опр Подмн-во $E \subset A$ наз. **открытым**, если каждая его точка - внутр., т.е. $\forall x \in E\ \exists r > 0 : S(x,r) \subset E$

Опр $x \in A$ - **граничная точка** $E \subset A$, если она не внутр, но $\forall r > 0$ $S(x,r) \cap E \neq \varnothing$ и $S(x,r) \cap A \setminus E = \varnothing$

Опр $x \in E$ - **изолир. точка**, если $\exists\, r > 0$ $S(x,r) \cap E \neq \varnothing$

Опр **Границей мн-ва E** назовём подмн-во в A сост. из всех гранич и изол. точек

$S(x,r) \setminus \{x\} = \overset{\circ}{S}(x,r)$

Опр $x \in A$ - **т. прикосновения**, для E, если $\forall r > 0$ $\overset{\circ}{S}(x,r) \cap E \neq \varnothing$

Опр - Мн-во E назовём **замкнутым**, если его граница содержится в нём, экв его дополнение до всего A будет открытым в A

Опр Подмн-во E - назовём **огран.** в A, если $\exists\, S(x,r) : E \subset S(x,r)$

Теорема Пусть $E \subset \mathbb{R}$, E - беск и огр. подмн-во. Тогда у E $\exists$ хотя бы одна т. прикосновения

Опр (Пусть Ω - счётное мн-во, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$) **Числ послед.** назовём любое отображение $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$

Опр $\{x_{n_k}\}$ - подпослед, если это послед состоит из членов послед $\{x_n\}$ и порядок следования не нарушается.

Опр Пос-ть $x: \Omega \to \mathbb{R}$ огр, если $x(\Omega)$ - огр под-во в метр. простр-ве $\mathbb{R}$, т.е $\exists\, S(y,r): \forall \omega \in \Omega: x(\omega) \in S(y,r)$

Опр Число x наз. част. пределом в пос-ти, если $\forall r>0$ $a^{-1}(S(x,r)$ - счетное$) = \Omega(x,r)$, если $\omega \in \Omega(x,r) \to a(\omega) \in S(x,r)$

Теорема: Всякая огр. числ. пос-ть имеет хотя б 1 част предел

Св-ва част. пределов: $T(a)$ - мн-во част. пределов

1. $T(a)$ - замк и огран т.к любая гран точка част пред

Опр Огр. послед. наз. сходящ., если у неё 1 част предел $T(a) = \{x\}$ и т.x называют пределом: $\lim a(\omega) = x$

св-ва мн-ва сход послед:

1. $(a+b)(\omega) = a(\omega) + b(\omega)$, $a, b \in p(\Omega)$, $\omega \in \Omega$
2. $(a \cdot b)(\omega) = a(\omega) \cdot b(\omega)$
3. $\lim (a+b)(\omega) = \lim a(\omega) + \lim b(\omega)$
4. $\lim (a \cdot b)(\omega) = \lim a(\omega) \cdot \lim b(\omega)$

Сход послед - кольцо

Опр Сход. послед. назыв б.м, если её предел „0"

; б.м послед идеал кольца Сход послед.

св-ва б.м пос-сти:

1. $(\alpha + \beta)(\omega) = \alpha(\omega) + \beta(\omega) \leftarrow$ б.м
2. $(\alpha \cdot \beta)(\omega) = \alpha(\omega) \cdot \beta(\omega) \leftarrow$ б.м
3. $(\alpha \cdot a)(\omega) = \alpha(\omega) \cdot a(\omega)$ $\alpha \leftarrow$ б.м, $a \leftarrow$ огран пос-ть.

Опр Пос-ть, у которой нет част. пределов наз б.б.

Теорема: Для $\forall$ част пред, сущ сход. пос-ть.

Опр Пос-ть $a: \Omega \to \mathbb{R}$ наз фундомент., если $\forall r>0$ $\exists\, Q \subset \Omega$ - конечное: $\forall\, \omega, \omega' \notin Q$ $|a(\omega) - a(\omega')| < r$

Теорема: Чис послед сход $\to$ она фундоментальна

св-ва $\varphi(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

1. $\forall a \in \mathbb{R} \ \exists \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \varphi(a)$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{a}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{b}{n}\right)^n\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n \cdot \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{b}{n}\right)^n = \varphi(a)\,\varphi(b)$
3. $\varphi(a)\cdot\varphi(b) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a+b}{n}\right)^n = \varphi(a+b)$
4. $a > b \Rightarrow \varphi(a) > \varphi(b)$ - монотонность

$\varphi(1)$ обозн. e. Тогда $\varphi(x) = e^x$

Теорема: $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln n}$

Теорема: Если $a_n \to A$, то $e^{a_n} \to e^A$

Теорема: $\exists N \in \mathbb{N} : n > N$, $\frac{\ln n}{n}$ $\to$ монотонно убыв $\Rightarrow$ посл-ть сход

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Предел и непрерывн. ф-ций.

Пусть $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}$, Ω – открытое. Если a – внутр. точка $\Rightarrow$ a – т. прикосн.

Опр Ф-я $f: \Omega \to \mathbb{R}$ в т.a локал. ограничена, если $\exists\, \delta > 0\ \exists\, M > 0$ $\forall x \in (a-\delta, a+\delta)$ $|f(x)| < M$ (см. рис. 1.)

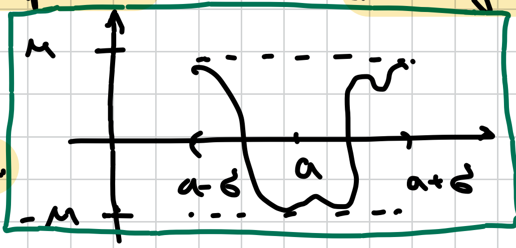


рис. 1.

Опр Число b – част. предел $f(x)$ в т.a, если $\exists$ посл-ть $x_n \to a$, $x_n \neq a$: $f(x_n) \to b$

Теорема Всякая локал огр ф-я в т.a имеет хотя бы 1 част предел.

Опр Локал огр в т.a ф-я имеет предел „b" в т.a, если $T_a(f) = \{b\}$

Опр (по Коши) Число A назыв пределом ф-ции $f(x)$ в т.a, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0: |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

Опр (по Гейне) Число A назыв. пределом ф-ции $f(x)$ в т.a если $\forall x_n \to a,\ x_n \neq a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[x_n \to a]{} A$

Опр $f(x)$ – непрерыв. в т. a, если она имеет предел в т.a и предел = значению ф-ции в этой точке.

Теорема: экв. 2 опр непрерывности

1. $\exists\, b\ \forall \{x_n\}: x_n \to a$ и $x_n \neq a \Rightarrow f(x_n) \to b$
2. $\exists\, b\ \forall r > 0\ \exists\, \delta > 0: \forall x\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x_n)| \to b$

Опр (Критерий Коши) Предел $f(x)$ в т.a существ $\longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0: \forall x_1, x_2\ \ 0 < |x_1 - a| < \delta,\ 0 < |x_2 - a| < \delta,\ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

Опр Все ф-ции имеющие в т.a предел 0 назовём б.м.: ($\alpha(x)$)

$\alpha(x) = f(x) - b \Rightarrow |f(x) - b| = |\alpha(x) - 0| < \varepsilon$. Будем считать, что $\alpha_a(a) = 0 \Rightarrow$ Всякая непр. ф-ция представима в виде: $f(x) = b + \alpha(x)$. Обозн $h = x - a \Rightarrow f(a+h) = f(a) + \alpha(h) = b + \alpha(h)$

Св-ва б.м функций:

1. Если $\alpha(h)$ и $\beta(h)$ - б.м в т.а, то $\alpha(h)+\beta(h)$ - б.м в т.а
2. $\alpha(h)\cdot\beta(h)=\sigma(h)$ - б.м в т.а
3. Если $f(h)$ - локал огр-на в т.а, то $f(h)\cdot\alpha(h)=\delta(h)$ - б.м в т.а
4. $\sigma(h)=\beta(\alpha(h))$ - б.м. в т.а

Опр Ф-я $f(x)$ назыв б.б. в т.а, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)\to\infty$

Теорема Если $f(x)$ непрерыв на $[a,b]$, то образом отрезка явл. $[A,B]$

Опр Ф-я непрерывна на мн-ве Ω, если она непрерыв $\forall$ т.а $\in\Omega$

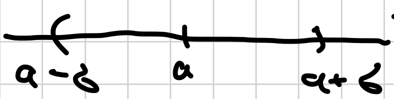
Теорема Пусть $f(x)$ - непрерыв в т.а и $f(a)=b$, $\varphi(y)$ - непрерыв в т.b. Тогда $F(x)=(\varphi\circ f)(x)=\varphi(f(x))$ - непрерывна в т.а

Теорема Пусть $f(x)$ - непрерыв на $[a,b]$ и $\forall x_1,x_2\in[a,b]$: $x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$. Тогда на мн-ве $[A,B]=f([a,b])$ $\exists$ обратная ф-ия и она непрерыв на $[A,B]$

Опр $f(x)$ равномерно непрерыв на $[a,b]$, если $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$: $\forall x,y\in[a,b]$ $|x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

Теорема Если $f(x)$ непрерывн на $[a,b]$, то $f(x)$ равномерно непрерывна на этом отрезке $[a,b]$.

Опр $a\in\Omega$ (открытое подмн-ство) - т. локал экстремума $f(x)$ в т.а, если $\exists\delta>0$: $\forall x$ $|x-a|<\delta$ $f(a+h)\geq f(a)$, $|h|<\delta$ - локал мин, $f(a+h)\leq f(a)$ - локал макс

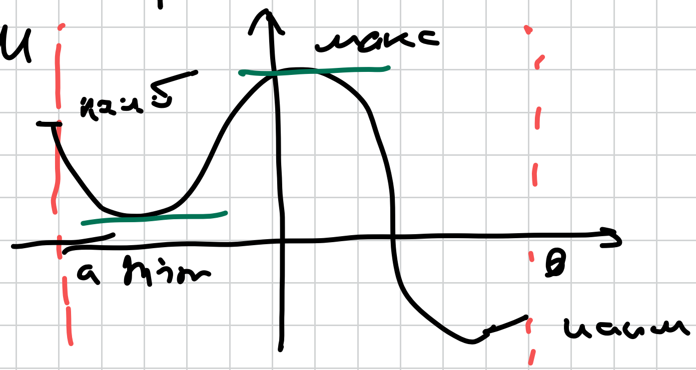


Теорема Пусть $f(x)$ - непрерыв на $[a,b]$ и $f(a)=f(b)$, тогда $\exists$ хотя бы 1 точка локал экстремума на (a,b). Если $f(x)=const$, то $\forall x$ - точка экстремума.

Опр Значение $f(c)$ функции $y=f(x)$ в т. $c\in[a,b]$ назыв наиб значением на $[a,b]$, если $\forall x\in[a,b]$ $f(x)\leq f(c)$

Опр Если $f(x)$ непр на $[a,b]$, то на $[a,b]$ функц достигает своей точной верх грани M и

$$\sup_{[a,b]} f(x) = \max_{[a,b]} f(x) = M$$



Дифференцируемость ф-ции:

Пусть $f(x)$ - непрерыв в т. $a \in \mathbb{R}$. $f(a+h) = f(a) + \alpha(h)$, $\alpha(h)$ - б.м ф-ция в т. a. C_a - кольцо всех непр в т. a ф-ций, обозн $\bar{o}(1)$ - макс идеал (т.е все б.м функции). Рассмотрим $\bar{o}(h) = h \cdot \bar{o}(1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{h \to 0} \frac{\bar{o}(1) h}{h} = 0$, $\bar{o}(h) \subset \bar{o}(1)$ и.т.д. Построим идеал $\bar{o}(h^k) = h^k \cdot \bar{o}(1)$

Сравним непрерыв функции с мн-ном: $P_n(x_0+h) = a_0 + a_1(x_0+h) + \ldots + a_n^n (x_0+h)^n = b_0 + b_1 \cdot h + \ldots b_n \cdot h^n$. Проведем Анализ мн-на:

$P_n(a_0+h) \to b_0$, $\to b_1 \cdot h \in \bar{o}(1)$, $\to b_n \cdot h^n \subset$ соберем обратно: $P_n(x_0+h) = b_0 + b_1 \cdot h + \ldots b_k h^k + h^k(b_{k+1} \cdot h + \ldots b_n \cdot h^{n-k}) = b_0 + b_1 \cdot h + \ldots b_k \cdot h^k + \bar{o}(h^k)$

Тогда всякий мн-н представим в виде: $\lim \frac{P_n(x_0+h) - P_n(x_0)^{=b_0}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{(b_1 + b_2 \cdot h + \ldots b_k \cdot h^{k-1}) h}{h} \to b_1$ $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\frac{P(x_0+h) - b_0}{h} - b_1}{h} \to b_2$

$$P(x_0+h) = P(x_0) + P'(x_0) \cdot h + P^{(2)}(x_0) \cdot \frac{h^2}{2} + \ldots \frac{P^{(k)}(x_0) \cdot h^k}{k!} + \bar{o}(h^k)$$

$$(x_0+h)^k = x_0^k + k \cdot x^{k-1} \cdot h + \frac{k(k-1) \cdot x_0^{k-2}}{2} \cdot h^2 + \ldots \frac{k(k-1)\ldots(k-i+1) \cdot x_0^{k-i}}{i!} \cdot h^i$$

Опр Ф-ция дифф-ма в т. a, если она представляется в виде $f(a+h) = f(a) + b_1 \cdot h + \bar{o}(h)$

Опр Ф-я $f(x)$ k раз дифф в т. a, если $\exists$ мн-н k вида $P_k(h) = b_0 + b_1 \cdot h + \ldots + b_k \frac{h^k}{k!}$ и б.м ф-ция $\alpha(h)$, что $f(a+h) = P_k(h) + h^k \cdot \alpha(h)$

Опр Число b_i называют i-ой произв ф-ции в т. a: $b_i = f^{(i)}(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\frac{\frac{P(a+h) - b_0}{h}}{\ldots} - b_i}{h}$

Опр Число $d^i f$ назыв. i дифференциалом (различителем) ф-ции в т. a: $d^i f = f^{(i)}(a) \cdot h^i$: $f(a+h) = f(a) + df + \frac{d^2 f}{2} + \ldots \frac{d^k f}{k!} + \bar{o}(h^k)$

Теорема Ф-ция $f(x)$ дифф-ма в т. a $\Leftrightarrow$ $\exists \lim \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Теорема Формула Лейбница $(UV)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k U^{n-k} V^k$, $C_n^k = \frac{n!}{k(n-k)!}$

$u(x)$, $v(x)$ - функции, имеющие произв до n-го порядка, то n

произв их произведение ↗

Теорема Пусть ф-ция $\varphi(x)$ - дифф-ма в т.а, $f(y)$ дифф-ма в т. в $в = \varphi(a)$. Тогда их композиция $F(x) = f(x) \circ \varphi(x) = f(\varphi(x))$ дифф-ма в точке а, и при этом $F'(a) = f'(в) \cdot \varphi'(a)$, где $в = \varphi(a)$

Опр k-ый дифф-ал $d^k y = d(d^{k-1} y) = f^{(k)}(x) \cdot dx$

Теорема о дифф-ти обратной ф-ции. Пусть $y = \varphi(x)$ в окр-сти т.а $\varphi(x)$ имеет обратн. ф-цию $x = \psi(y)$ и пусть $\varphi(x)$ дифф-ма в т.а и при этом $\varphi'(a) \neq 0$. Тогда обратная ф-ция дифф-ма в т. в и непрерывна в т. в и выполняется $\psi'(в) = \frac{1}{\varphi'(a)}$, где $в = \varphi(a)$ и $a = \psi(в)$

Дифференцируемость элем. ф-ции: (попробуй д-ть)

1. $\sin x$ 2. $f(x) = kx$ 3. $f(x) = x^n$
4. $f(x) = c \cdot \varphi(x)$ 5. $f(x) = \cos x$ 6. $f(x) = \arcsin x$
7. $f(x) = \frac{1}{x}$ $/\{0\})$ 8. $f(x) = e^x$ 9. $f(x) = \ln x$

Опр Пусть $f(x)$ дифф-ма в каждой т. открытого мн-ва $E \subset \mathbb{R}$ $\forall x \in E$ $\exists$ число $f'(x)$. $f': x \to f'(x)$ назовем производной

Теорема Пусть $f(x)$ опр. на открытом мн-ве Ω, пусть $\exists$ произв ф-и $f(x) \Rightarrow f'(x)$ непрерыв $\exists$ т. $c \in \Omega$, в кот. $f'(c)$ непрерыв. Тогда $\exists$ окрестность c $(\exists \delta > 0: (c-\delta, c+\delta) \in \Omega)$, что на всей $f(x)$ имеет обратную.

Теорема. Пусть $f(x)$ дифф. в $\forall x \in (a,в)$ и непр на $[a,в]$ $f(a) = f(в)$, тогда $\exists\ \hat{x} \in (a,в)$: $f'(\hat{x}) = 0$

Правило Лопиталя

1. Если $f(x)$ и $g(x)$ опред. в окрес-ти т.а, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, $f'(x)$ и $g'(x)$ существ в окрестности т.а и не обращ. в 0 при $x = a$, $\exists \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

2. Если $f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, $\exists f'(x)$ и $g'(x)$ в окрестности a и не образу. в 0 при $x \to a$, $\exists \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Теорема о конечн приращениях (т. Коши) Пусть $f(x)$ и $g(x)$ непр на $[a,b]$ и дифф на (a,b). Тогда $\exists\, c \in (a,b) : (f(b)-f(a)) \cdot g'(c) = f'(c)(g(b)-g(a))$

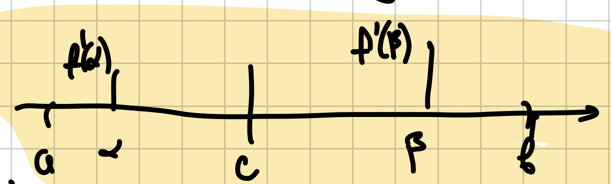
Теорема Лагранжа (Из следствия т. Коши): $g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1$ $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$

Опр. Идеал кольца $\mathbb{R}$ – подкольцо Δ кольца, что $\forall i \in \Delta$ $\forall r \in \mathbb{R}$ $i \cdot r \in \Delta$

Макс идеал – идеал кольца, не содерж ни в каком другом идеале

1. $\bar{o}(1)$ - все б м функции - макс идеал кольца непр ф-й
2. $\varphi(x) = O(\psi(x))$, $x \in X \Leftrightarrow \forall x \in X$ $|\varphi(x)| < A \cdot |\psi(x)|$ и такое A $\exists$

Теорема Дарбу. Пусть $f(x)$ дифф ф на (a,b) в кажд. точке, т.е $\exists f'(x)$ на (a,b), $\alpha, \beta \in (a,b)$. Пусть $f'(\beta) > f'(\alpha)$. Тогда $\forall$ $c \in (f'(\alpha), f'(\beta))$ найдется хотя б 1 т. $d \in (a, b) : f'(d) = c \Rightarrow$ произв. примет все значения от $f'(\alpha)$ и $f'(\beta)$



Мн-н Тейлора Пусть Ω - открыт подмножество $\mathbb{R}$. $C^{(n)}(\Omega)$ - все ф-ии, опр на Ω для которых $\exists f^{(1)}, \dots, f^{(n)}$. Пусть $k \in \mathbb{N} < n$, т. $z \in \Omega$, построим мн-н т.к $P_k(x, z, f) = f(z) + f'(z)(x-z) + \dots$
$\dots + \frac{f^{(k)}(z)}{k!}(x-z)^k$ - мн-н Тейлора

Теорема Формула Тейлора. Если $f(x)$ опр. в окрест. т. a $f(x)$ дифф $(n-1)$ раз, в окрестн. т. a. $\exists$ произв порядка n, то $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k + \bar{o}(x-a)^n$ в этой окрестн.

Интеграл Римана.

Пусть $f(x)$ опр на $[a,b]$ и огр на $[a,b]$ $\Rightarrow \exists \sup f(x), \inf f(x)$

Разбиение отрезков $\sigma = \{a, x_1, \dots x_n, b\}$ $x_0 = a, x_{n+1} = b$

$\forall [x_i, x_{i+1}] \to \sup\limits_{[x_i, x_{i+1}]} f(x) = M_i : [x_i, x_{i+1}] \Rightarrow \inf\limits_{[x_i, x_{i+1}]} f(x) = m_i$

Опр Верх суммой Дарбу $f(x)$ по отр $[a,b]$ назовём: $\overline{I}(f,\sigma)$

$\overline{I}(f,\sigma) = M_1(x_1 - x_0) + \dots + M_{n+1}(x_{n+1} - x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n+1} M_i(x_i - x_{i-1})$

Нижн сумма: $\underline{I}(f,\sigma) = m_i(x_1 - x_0) + \dots + m_{n+1}(x_{n+1} - x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n+1} m_i(x_i - x_{i-1})$

св-ва сумм Дарбу:

1. $\overline{I}(f+g, \sigma) \le \overline{I}(f,\sigma) + \overline{I}(g,\sigma)$, $\underline{I}(f+g,\sigma) \ge \underline{I}(f,\sigma) + \underline{I}(g,\sigma)$
2. $\overline{I}(\lambda \cdot f, \sigma) = \lambda \cdot \overline{I}(f,\sigma)$, $\underline{I}(\lambda f,\sigma) = \lambda \cdot \underline{I}(f,\sigma)$: $\lambda \le 0$ $\underline{I}(\lambda \cdot f, \sigma) = \lambda \cdot \overline{I}(f,\sigma)$
3. Если $\sigma_1 \subset \sigma_2$, то $\overline{I}(f,\sigma_1) \ge \overline{I}(f,\sigma_2)$, $\underline{I}(f,\sigma_1) \le \underline{I}(f,\sigma_2)$
4. $\overline{I}(f,\sigma) \ge \underline{I}(f,\sigma)$
5. $\forall \sigma_1, \sigma_2 \in \sigma$ $\underline{I}(f,\sigma_1) \le \overline{I}(f,\sigma_2)$

Теорема: Если σ_0 - фикс, то из 5) $\forall \sigma$ любая $\overline{I}(f,\sigma) \ge \underline{I}(f,\sigma_0)$ - нижн грань всех сумм $\forall \sigma$ $\underline{I}(f,\sigma) \le \overline{I}(f,\sigma_0)$ - верхн грань нижн сумм. Тогда $\exists! \inf \overline{I}(f,\sigma)$ для $[a,b]$, т.е ф-ции и отрезку соотв. число: $(f,[a,b]) \to \inf \overline{I}(f,\sigma)$

Опр Верх интеграл Дарбу $\overline{\int\limits_a^b} f = \inf \overline{I}(f,\sigma)$

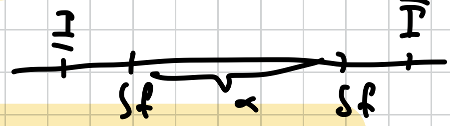
Опр Нижн. интеграл Дарбу $\underline{\int\limits_a^b} f = \sup \underline{I}(f,\sigma)$

св-ва интегралов Дарбу:

1. $\overline{\int\limits_a^b} f+g \le \overline{\int\limits_a^b} f + \overline{\int\limits_a^b} g$: $\underline{\int\limits_a^b} f+g \ge \underline{\int\limits_a^b} f + \underline{\int\limits_a^b} g$
2. $\overline{\int\limits_a^b}(\lambda \cdot f) = \lambda \overline{\int\limits_a^b} f$, $\lambda > 0$: $\overline{\int\limits_a^b}(\lambda, f) = \lambda \cdot \underline{\int\limits_a^b} f$, $\lambda < 0$.
3. $\forall f$ $\forall [a,b]$ $\underline{\int\limits_a^b} f \le \overline{\int\limits_a^b} f$
4. $[a,b] = [a,c] \cup [c,b]$ Если f огр на $[a,b]$, то огр на $[a,c], [c,b]$:

$\int_a^b f \geq \int_a^c f + \int_c^b f$: $\int_{\bar{a}}^b f \leq \int_{\bar{a}}^c f + \int_c^b f$

Теорема Критерий инт-сти по Риману. Ф-я $f(x)$ инт-ма по Риману $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \sigma : \overline{I}(f,\sigma) - \underline{I}(f,\sigma) < \varepsilon$



Теорема Если $f(x)$ непр. на $[a,b]$, то она инт-ма

Опр Пусть $f(x)$ опр на $[a,b]$, $\sigma \in \sigma$ $\forall [x_i, x_{i+1}] \in \sigma$ $\forall \xi_i \in [x_i, x_{i-1}]$ $\exists f(\xi_i)$. Интегральной суммой $f(x)$ на $[a,b]$ назовём $I(f,\sigma,\xi) = \sum_{i=1}^{n+1} f(\xi_1)(x_i - x_{i-1})$. Заметим, что $\forall i$ $\inf f(x) \leq f(\xi_i) \leq \sup f(x) \Rightarrow$ $\underline{I}(f,\sigma) \leq I(f,\sigma,\xi) \leq \overline{I}(f,\sigma)$

Опр Число A наз. предельным знач-ем для семейства интегр сумм, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \sigma \ \forall \xi : |I(f,\sigma) - A| < \varepsilon$ (*)

Теорема. Предельная точка сущ $\Rightarrow f(x)$ инт-ма по Риману

Теорема Пусть $f(x)$-непр на $[a,b]$, $\varphi(t)$ -инт на $[\alpha,\beta]$ и $\forall t \in [\alpha,\beta] : \varphi(t) \in [a,b]$, тогда $F(t) = f(\varphi(t))$-инт на $[\alpha,\beta]$

Следствие:

Теорема Интеграл Римана линеен и аддитивен (из св-ств 3,4)

Линейность: $\lambda \int_a f(x) = \int_a \lambda f(x)$ Аддитивн: $\overline{I}(f,\sigma) - \underline{I}(f,\sigma) < \varepsilon$

Теорема о мелких разбиениях. $f(x)$ инт-ма на $[a,b] \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \sigma \ |\sigma| < \delta \Rightarrow \overline{I}(f,\sigma) - \underline{I}(f,\sigma) < \varepsilon$

Теорема Если $f(x)$ непр-вна на $[a,b]$, то $\Phi(x) = \int_c^x f(\xi)d\xi$ - дифф в $\forall x \in [a,b]$ и $\Phi'(x) = f(x)$

Лемма о ср. знач. $f(x)$ - непр, то $\sup f(x) = \max f(x) = M$, $\inf f(x) = \min f(x) = m \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \leq M(b-a)$

Теорема Формула Ньютона-Лейбница. Если $f(x)$ - непр на

$[a,b]$, её произв ф-ция $\varphi(x) = f'(x)$ - непр на $[a,b]$, то
$f(b) - f(a) = \int_a^b \varphi$

Теорема о замене переменной. Если $\varphi(x)$ непрерывна на $[a,b]$, $g(T)$ - непр на $[\alpha,\beta]$, $\varphi(x)$ непр на области значений $g(T)$ на $[\alpha,\beta]$, $g'(T)$ - непр на $[\alpha,\beta]$: $g(\alpha)=a$, $g(\beta)=b$,
то $\int_a^b F'(x) = \int_a^b F(g(x))\cdot g'(x)$

Опр. Неопр интеграл. Пусть $C'(a,b)$ - все непр дифф ф-ции на (a,b). $\Phi \in C'(a,b)$, то $\varphi(x) = \Phi'(x)$, $\varphi \in C(a,b)$

Лин отобр: $\Phi(x) \xrightarrow{d} d\Phi dx$ d - лин отобр. Пусть $\varphi(x) \in C(a,b)$:
$\forall\ c \in (a,b)$ $\int_c^x \psi(\xi) = \Psi(x)$, $\Psi'(x) = \psi(x)$, $d\Psi = \psi(x)dx$
$d: C'(a,b) \to C(a,b)$ - лин отобр на лин пр-во дифференциал $\psi(x)dx$. $\operatorname{Ker} d = \mathbb{R}$: $\Phi(x)$ и $F(x)$ лежат в одном классе эквив. Все ф-ции $\Phi(x) \equiv 0$, $\Phi(x) - \Phi(c) = \Phi'(\xi)(x-c)$, $\Phi'(\xi) = 0$; $\Phi(x) \simeq F(x) = \operatorname{ker} d$: $x^2 + C$ - класс экв

$$\begin{tikzcd} F \in C'(a,b) \arrow[r, "d"] \arrow[dr] & F'(x)dx \arrow[d, shift left, "\int"] \\ & F+C \arrow[u, shift left, "d\text{-изоморф}"] \end{tikzcd}$$

Тогда $\int$ - лин отобр диффер, отвеч непр ф-циями в фактор пространстве $C'(a,b) / \operatorname{Ker} d$
Для $\forall$ непр ф-ции $\varphi(x)$
$\int \varphi(x)dx = \int d\Phi = \Phi(x) + \mathbb{R}$

Теорема Формула интегрирования по частям для неопр. интеграла. Если $\varphi \cdot \psi$ - произв $= \Phi$
$\int d\Phi = \int \varphi \cdot d\psi + \int \psi \cdot d\varphi \Rightarrow \int \varphi\ \psi' \cdot dx = \varphi(x) \cdot \psi(x) - \int \psi \cdot \varphi' \cdot dx$

Теорема Формула замены переменной:

Если $f \in R[a,b]$ и $f \in C[a,b]$
интегрируема ... непрерывна

$$\forall \varphi : \varphi' = f : \varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b f(\xi)\, d\xi$$

Пример

$$\int \sin x^2 \cdot dx = \int \sin x^2 \cdot \frac{dx^2}{2} = \frac{1}{2}\int \sin x^2 \cdot dx^2 = \frac{1}{2}\int \sin t\, dt$$

$x^2 = t$

$$= -\frac{1}{2}\cos x^2 + C$$